HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Luokanopettajien käsityksiä ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulun matematiikan opetuksessa

Helsingin yliopisto
Kasvatustieteiden maisteriohjelma
Luokanopettajakoulutus
Pro gradu -tutkielma 30op
Kasvatustiede
Tammikuu 2021
Iida Ylä-Rautio

Ohjaajat: Markku Hannula ja Anu Laine

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Kasvatustieteellinen tiedekunta, Kasvatustieteiden maisteriohjelma		
Tekijä - Författare - Author Iida Ylä-Rautio		
Työn nimi - Arbetets titel Luokanopettajien käsityksiä ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulun matematiikan opetuksessa		
Title Class teacher conceptions on supporting learning with understanding in primary school mathematics teaching		
Oppiaine - Läroämne - Subject Kasvatustiede		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Markku Hannula, Anu Laine	Aika - Datum - Month and year 22.1.2021	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 81 s + 6 liites.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tavoitteet. Tämän pro gradu -tutkielman tarkoituksena on selvittää luokanopettajien käsityksiä matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisesta ja siihen liittyvistä tekijöistä. Sekä matematiikan opetuksen tutkimuksen että matematiikan opetussuunnitelman mukaan yksi matematiikan opetuksen tärkeimpiä tavoitteita on tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Tähän tavoitteeseen ei kuitenkaan tutkimusten perusteella ole vielä päästy, ja matematiikan opetus tukee usein ennemmin mekaanista osaamista kuin matematiikan ymmärtävää oppimista. Tässä tutkielmassa pyrin selvittämään, mitä asioita luokanopettajat pitävät tärkeänä ymmärtävän matematiikan opetuksen toteutumisen suhteen. Tutkielmani avulla saadaan tietoa siitä, mihin asioihin matematiikan opetuksessa, sen tutkimuksessa ja opettajien koulutuksessa tulisi kiinnittää huomiota, jotta tavoite matemaattista ymmärrystä tukevasta opetuksesta olisi mahdollista saavuttaa.

Menetelmät. Tutkielman aineisto koostui kuuden matematiikasta kiinnostuneen tai siihen erityisesti perehtyneen luokanopettajan teemahaastattelusta. Aineisto analysoitiin laadullisen sisällönanalyysin keinoin. Käytin analyysissa apuna Atlas.ti-tietojenkäsittelyohjelmaa, joka on tarkoitettu kvalitatiivisen aineiston analysoimiseen. Analyysissa nostin aineistosta esiin kaksi teemaa, joiden pohjalta kirjoitin tulokseni.

Tulokset ja johtopäätökset. Luokanopettajien käsitykset ymmärtävän oppimisen tukemisesta liittyivät joko opetus-oppimisprosessiin tai opettajaan. Matemaattisen ymmärryksen tukeminen vaikutti muodostavan prosessin, joka alkaa uuteen aiheeseen orientoitumisesta ja konkreettisesta toiminnasta, minkä jälkeen uutta asiaa harjoitellaan esimerkiksi oppikirjan tehtävien avulla. Matemaattisen tietoverkoston kehittyminen ja matematiikan soveltamistaito nähtiin ymmärryksen seurauksena. Matematiikkapuheen ajateltiin tukevan matemaattista ymmärrystä koko prosessin ajan. Lisäksi ymmärtävän oppimisen kannalta on tärkeää, että opettaja itse osaa ja ymmärtää matematiikkaa sekä suunnittelee matematiikan opetuksen huolellisesti. Ymmärtävää oppimista tukevan matematiikan opetuksen toteutuminen vaikuttaa siis riippuvan siitä, onko opettajalla riittävät tiedot ja taidot sellaisen opetuksen suunnitteluun ja toteuttamiseen.

Avainsanat - Nyckelord
Matematiikka, matematiikan opetus, matematiikan oppiminen, matemaattinen ymmärrys, ymmärtävä oppiminen

Keywords
Mathematics, math teaching, math learning, mathematical understanding, learning with understaning

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Helsingin yliopiston kirjasto – Helda / E-thesis (opinnäytteet)
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Educational Sciences		
Tekijä - Författare - Author Iida Ylä-Rautio		
Työn nimi - Arbetets titel Luokanopettajien käsityksiä ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulun matematiikan opetuksessa		
Title Class teacher conceptions on supporting learning with understanding in primary school mathematics teaching		
Oppiaine - Läroämne - Subject Education		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Master's Thesis / Markku Hannula, Anu Laine	Aika - Datum - Month and year 22.1.2021	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 81 pp. + 6 appendices

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Objectives. The objective of this pro gradu thesis is to survey what class teachers think about the support of and factors related to learning mathematics with understanding. One of the most important goals of the teaching of mathematics, according to both research into the teaching of mathematics and the curriculum for mathematics, is to support pupils in their development of mathematical understanding. According to studies this goal has not yet been attained, as mathematics teaching more often supports procedural knowledge than learning mathematics with understanding. In this study I set out to find out what are the things class teachers consider important for the success in teaching mathematics with understanding. This study aims at collecting information about the areas we should pay attention to in the teaching of mathematics, in its research and in teacher training to make it possible to achieve the goal of teaching that supports mathematical understanding.

Methods. The material of the study consists of thematic interviews with six class teachers who are interested or specialized in mathematics. The material was analyzed by means of a qualitative content analysis. I made use of the Atlas.ti software that is intended for qualitative data analysis. In my analysis I raised two themes that my results are based on.

Results and conclusions. What class teachers conceived of as supporting learning with understanding was related either with the teaching-learning process or the teacher. Supporting mathematical understanding seemed to form a process that starts with the orientation into a new subject as well as the use of concrete models, after which the new subject matter is being rehearsed with the help of, for example, textbook exercises. The development of mathematical network of knowledge and the skill to apply mathematics were seen as a consequence of understanding. Hearing and speaking mathematical language was thought to support mathematical understanding throughout the process. For learning with understanding to succeed it is furthermore important that the teachers themselves know and understand mathematics and plan the teaching of mathematics carefully. It appears that success in the teaching of mathematics that supports learning with understanding depends on whether the teachers have sufficient knowledge and skills to plan and carry out such teaching.

Avainsanat - Nyckelord
Matematiikka, matematiikan opetus, matematiikan oppiminen, matemaattinen ymmärrys, ymmärtävä oppiminen

Keywords
Mathematics, math teaching, math learning, mathematical understanding, learning with understaning

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsinki University Library – Helda / E-thesis (theses)

UNIVERSITY OF HELSINKI

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

TAULUKOT

KUVIOT

1 Johdanto

Matematiikka on aina ollut minulle tärkeä ja mieluinen oppiaine. Nautin sen loogisuudesta ja oivaltavista onnistumisen kokemuksista, joita se tarjoaa. Resurssiopettajana ja sijaisena toimiessani olen kuitenkin harmikseni huomannut, että matematiikkaa opetetaan usein hyvin mekaanisesti ja että oppilaiden toiminta matematiikan tunneilla koostuu lähinnä oppikirjan tehtävien läpi kahlaamisesta. Tällöin oppilaat eivät välttämättä ymmärrä, mistä matematiikassa oikeastaan on kyse. Matematiikka saattaa näyttäytyä heille erillisinä sääntöinä ja toimintoina, joilla ei ole yhteyttä toisiinsa saati oppilaan omaan elämään. Jotta matematiikan oppiminen olisi hyödyllisempää ja mielekkäämpää, matematiikkaa tulisi siis ymmärtää. Tässä pro gradu -tutkielmassa haluan selvittää, millä tavoin matematiikan opetuksessa voitaisiin parhaalla mahdollisella tavalla tukea matematiikan ymmärtävää oppimista.

Koskisen (2016) mukaan matematiikan opetuksen tutkimuksessa matematiikan ymmärtävään oppimiseen on 1970-luvulta lähtien alettu kiinnittää enenevissä määrin huomiota. Eri tutkimuksissa ymmärtävän oppimisen lähtökohtina on korostettu muun muassa konkreettisuutta (esim. Pirie & Kieren, 1994), kontekstuaalisuutta (esim. Wearne & Hiebert, 1988), sosiaalista kommunikaatiota (esim. Brown, 1996) ja ongelmanratkaisua (esim. Johanning, 2008). Näin matematiikan ymmärtävän oppimisen ja opetuksen tutkimuksessa on jo pitkään korostunut sosio-konstruktivistinen näkemys oppimisesta (Koskinen, 2016), mikä näkyy myös nykyisessä matematiikan opetussuunnitelmassamme (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, tästä lähtien POPS, 2014, s. 128–130, 234–239).

Matematiikan ymmärtävällä oppimisella tarkoitetaan, että matemaattisten käsitteiden ja proseduurien käytön oppimisen lisäksi ymmärretään, mihin niiden toiminta perustuu ja mitä niillä voidaan tehdä (Haapasalo, 2004, s. 79; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 84). Usein matemaattisesta ymmärryksestä puhutaan matemaattisen tietoverkoston kehittymisenä, millä tarkoitetaan sitä, että matematiikan eri käsitteiden ja ideoiden välille muodostuu yhteyksiä (esim. Hiebert & Carpenter, 1992, s. 66–69; Pehkonen, 2011, s. 17). Lisäksi matemaattisen ymmärryksen kehittymisen kannalta pidetään tärkeänä, että oppilaat saavat itse muodostaa ja rakentaa matemaattista tietoaan sen sijaan, että he vastaanottaisivat sitä valmiina (esim. Hiebert & Carpenter, 1992, s. 74; Patrikainen, 2012, s. 73). Tässä tutkielmassa tarkoitan matematiikan ymmärtävällä oppimisella sitä, että matematiikkaa tutkimalla ja tarkastelemalla oppilaiden on mahdollista saada käsitys siitä, mistä matematiikassa on kyse.

Miksi matematiikan ymmärtäminen sitten on niin tärkeää? Koskinen (2016) tuo esille, että matematiikka on korkeasta abstraktisuustasostaan johtuen usein hyvin kaukana oppilaiden omista arkikokemuksista, minkä vuoksi oppilaan voi olla vaikeaa käsittää, mihin kaikkia matematiikan oppeja oikeastaan tarvitaan. Tätä merkityskuilua Koskinen (2016) kutsuu ”mielekkyyden ongelmaksi”, jota hän pitääkin matematiikan opetuksen tärkeimpänä haasteena. Jos matematiikkaa ja sen merkitystä arkielämässä ei ymmärretä, myös matematiikan soveltaminen on käytännön tilanteissa haastavaa. Boaler (1998) nostaakin esille huolen siitä, etteivät oppilaat osaa käyttää koulussa oppimaansa matematiikkaa koulun ulkopuolisissa tilanteissa. Matematiikan ymmärtäminen tekee siis matematiikan oppimisesta sekä merkityksellisempää että hyödyllisempää.

Vaikka matematiikan ymmärtävää oppimista on tutkittu jo pitkään ja sen merkityskin tunnistetaan, tavoitteeseen ymmärtävään oppimiseen tähtäävästä matematiikan opetuksesta ei ole vieläkään päästy. Yhtenä haasteena matemaattista ymmärrystä tukevan opetuksen toteutumisessa voidaan pitää matematiikan oppikirjoja, jotka tukevat ennemmin matematiikan mekaanista osaamista kuin matematiikan ymmärtämistä, mutta jotka kuitenkin ohjaavat voimakkaasti matematiikan opetusta (Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018, s. 346; Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Tästä syystä oppikirjoihin perustuvan matematiikan opetuksenkin voidaan ajatella helposti keskittyvän ennemmin mekaanisen sujuvuuden kuin matemaattisen ymmärryksen kehittymiseen. Perkkilä (2002), joka tutki väitöskirjassaan opettajien matematiikkauskomuksia ja matematiikan oppikirjan merkitystä alkuopetuksessa, toteaakin, että vaikka matematiikkaa pyrittiin opettamaan ymmärtämisen näkökulmasta, opetuksen tavoitteissa korostui oppikirjan sisältöjen läpikäyminen. Patrikainen (2012) puolestaan huomauttaa, että sosio-konstruktivistinen oppimiskäsitys ei useinkaan toteudu matematiikan opetuksessa, vaikka tarvetta opetuskäytänteiden muuttamiseen pidetään tärkeänä myös opettajien keskuudessa. Vaikuttaa siis siltä, että opettajat kyllä haluaisivat opettaa matematiikkaa ymmärrykseen tähtäävästi, mutta heillä ei ole riittäviä resursseja tai osaamista opetuskäytänteen muuttamiseen.

Tässä pro gradu -tutkielmassa pyrin selvittämään, millä tavoin matematiikan opetuksesta kiinnostuneet ja siihen erityisesti perehtyneet luokanopettajat pyrkivät tukemaan oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä ja matematiikan ymmärtävää oppimista alakoulun matematiikan opetuksessa. Lisäksi minua kiinnostaa, mitä tekijöitä nämä opettajat pitävät merkittävinä ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteutumisessa. Tutkimuksessa saadaan tietoa myös opettajien käsityksistä siitä, mihin asioihin matematiikan opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota. Tarkastelen, vastaavatko luokanopettajien käsitykset matematiikan opetuksen tutkimuksessa vallitsevia käsityksiä. Lopuksi pohdin, millaisiin asioihin on jatkossa kiinnitettävä huomiota, jotta matematiikan mielekkään ja ymmärtävän oppimisen tavoitteet olisi mahdollista saavuttaa.

2 Ymmärtävään oppimiseen tähtäävä matematiikan opetus

Tässä luvussa tarkastelen ymmärtävään oppimiseen tähtäävää matematiikan opetusta. Ensimmäisessä alaluvussa käsittelen ymmärtävää oppimista ja sen tukemista matematiikan opetuksessa. Toisessa alaluvussa pohdin opettajan roolia matematiikan ymmärtävän oppimisen mahdollistajana ja tukijana.

2.1 Ymmärtävä oppiminen ja sen tukeminen

Matematiikan ymmärtämistä pidetään yhtenä matematiikan opetuksen tärkeimpänä tavoitteena, johon monet muut matematiikan opetuksen tavoitteet liittyvät (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Olivier & Human, 1997, s. 2; Pehkonen, 2011, s. 23; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 81). Näin ollen matematiikan opetus tulisi suunnitella niin, että se tukee oppilaan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Millä tavoin ymmärryksen kehittymistä sitten voidaan tukea? Koskinen (2016, s. 161) ehdottaa, että matematiikan merkityksellistä ja ymmärtävää oppimista voidaan tukea esimerkiksi konkreettisuuden, kontekstuaalisuuden ja sosiaalisuuden avulla. Seuraavaksi käsittelen tarkemmin, mitä matematiikan ymmärtävällä oppimisella tarkoitetaan matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Sen jälkeen tarkastelen konkreettisuutta, kontekstuaalisuutta ja sosiaalisuutta ymmärtävän oppimisen tukemisen keinoina. Lopuksi esittelen vielä mallin matematiikan ymmärtävän oppimisen opetus-oppimisprosessista, jossa tukemisen keinot on liitetty osaksi prosessia.

2.1.1 Ymmärtävä oppiminen

Matematiikan tehtävistä voi suoriutua hyvin, jos osaa tehtävässä tarvittavat laskutoimitukset ja säännöt. Jos oppilas saa ratkaistua tehtävät oikein, voidaan ajatella, että hän on oppinut asian. Ymmärtävässä oppimisessa tähdätään kuitenkin syvempään osaamiseen: Haapasalon (2004, s. 79) mukaan on tärkeämpää ymmärtää, miten, miksi ja mitä on milloinkin tekemässä, kuin vain suorittaa tehtäviä oikein. Koskinen ja Pitkäniemi (2020, s.

84) yhtyvät tähän toteamalla, että ”ymmärtämisen kannalta oleellista on, että oppilas oivaltaa, miksi matematiikassa toimitaan tietyllä tavalla tietyssä tilanteessa.” Sen lisäksi, että oppilas osaa käyttää tiettyä matemaattista proseduuria, hänen tulisi siis ymmärtää, miten proseduuri toimii, miksi hän käyttää juuri sitä proseduuria ja mitä kyseisessä proseduurissa oikeastaan tapahtuu. Koskisen (2016, s. 165) mukaan ymmärtävässä oppimisessa viitataan usein joko Brownellin (1947) ajatukseen siitä, että oppilaan on nähtävä jotain mieltä (”seeing sense”) siinä, mitä hän on tekemässä, tai Skempin (1976) ajatukseen, jonka mukaan oppilaan on tiedettävä, mitä tekee ja miksi (”knowing what to do and why”). Esimerkiksi erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun voi osata, kun tietää, että ensin murtoluvut pitää muuntaa laventamalla tai supistamalla samannimisiksi ja sitten lisätä tai vähentää osoittajat. Tämä on mahdollista, jos oppilas muistaa proseduurin, mutta ymmärtääkseen sen oppilaan tulisi myös tietää, miksi murtoluvut tulee muuntaa samannimisiksi ja mitä luvuille oikeastaan tapahtuu laventaessa tai supistaessa.

Yleinen käsitys ymmärtävästä oppimisesta on, että ymmärryksen kehittymiseksi oppilaan matemaattisten tietojen välille on muodostuttava yhteyksiä. Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 66–69) mukaan ymmärtääkseen matematiikkaa oppilaan täytyy tunnistaa matematiikan eri ideoiden välisiä yhteyksiä, jotka muodostavat vähitellen yhä yhtenäisempiä matemaattisia tietoverkostoja. Nämä tietoverkostot kehittyvät, kun uusi matemaattinen tieto yhdistyy aiempaan tietoon tai kun aikaisempien tietojen välille syntyy uusia yhteyksiä. Näin ymmärrys matematiikasta lisääntyy, kun matemaattinen tietoverkosto kasvaa ja järjestyy. (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 66–69.) Esimerkiksi jos oppilas huomaa, että desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku perustuu kymmenjärjestelmään, kuten kokonaislukujenkin yhteen- ja vähennyslasku, ja että desimaalilukujen laskujen ja kokonaislukujen laskujen välillä on yhteys, voidaan ajatella, että oppilas on ymmärtänyt asian. Toisaalta oppilas voi myös tunnistaa desimaali- ja murtolukujen yhteyden ja käyttää tätä yhteyttä apuna laskutoimituksissa, jolloin syntyy uusi yhteys. Hiebert ja Carpenter (1992, s. 67) toteavatkin, että matemaattinen idea tai proseduuri on ymmärretty, kun se liittyy osaksi matemaattista tietoverkostoa, ja että asia on ymmärretty sitä paremmin, mitä enemmän ja voimakkaampia yhteyksiä siihen liittyy. Parhaassa tapauksessa yksilön matemaattinen tieto muodostuu selkeäksi ja loogiseksi tietorakenteeksi, josta on mahdollista palauttaa asioita mieleen (Pehkonen, 2011, s. 17).

Matematiikan proseduurit usein joko osataan tai ei osata. Matematiikan ymmärrys sen sijaan ei ole yhtä yksiselitteistä. Koska matemaattisten ideoiden välille voi luoda loputtomasti yhteyksiä, myös ymmärrys on loppumatonta. Sillä ei ole päätepistettä, jossa olisi ikään kuin saavutettu täydellinen ymmärrys jostakin asiasta (Kieran, 1994, s. 589; Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009, s. 3; Pehkonen, 2011, s. 14). Toisaalta tämä tarkoittaa myös sitä, että kaikilla on jonkin tasoista ymmärrystä (Barmby, ym., 2009, s. 3). Matemaattinen ymmärrys voi kuitenkin olla myös hataraa, jos yhteydet ovat vähäisiä tai heikkoja (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 69; Pehkonen, 2011, s. 19). Jokaisen oppilaan matemaattista ymmärrystä voidaan kuitenkin pyrkiä kehittämään, ja matematiikan opetus, jossa oppilaita autetaan rakentamaan yhteyksiä, on Hiebertin ja Wearnen (1992, s. 99) mukaan ymmärrykseen tähtäävää matematiikan opetusta.

Keskustelussa matematiikan ymmärtämisestä on jo pitkään ollut esillä kysymys siitä, onko ymmärrys tärkeämpää kuin taitojen oppiminen (ks. esim. Skemp, 1976, ”relational understanding” ja ”instrumental understanding”). Matemaattinen tieto voidaan jakaa karkeasti kahdenlaiseen tietoon: menetelmätietoon (*procedural knowledge*) ja käsitetietoon (*conceptual knowledge*) (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 77). Menetelmätiedolla viitataan esimerkiksi matemaattisten proseduurien tai algoritmien sujuvaan käyttöön, kun taas käsitetiedolla tarkoitetaan matematiikan tietojen muodostamaa tietoverkostoa (emt., s. 78). Näin ollen voisi ajatella, että matemaattinen ymmärrys liittyy ennemmin käsitetietoon kuin menetelmätietoon, kuten Pehkonenkin (2011, s. 17) toteaa. Hiebertin ja kumppaneiden (1997, s. 6) mukaan ymmärtämisen ja taitojen välinen vastakkainasettelu on kuitenkin turha, koska myös taitoja voi oppia ymmärtävästi. Matematiikan opetuksessa tulisikin pyrkiä auttamaan oppilaita liittämään myös proseduurit osaksi matemaattista tietoverkostoaan ennen kuin aletaan harjoittelemaan niiden sujuvaa käyttöä. Kun oppilaat ymmärtävät proseduurin, he voivat käyttää sitä joustavammin ja soveltaa sitä myös uusiin tilanteisiin. Näin oppilaat oppivat menetelmiä, joita he myös oikeasti osaavat käyttää. (Hiebert, ym., 1997, s. 7.) Jos tarkastellaan esimerkiksi aiemmin mainitsemaani desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskua, on selvää, että oppilaat pystyvät hyödyntämään niitä matematiikassa monipuolisemmin, jos niiden yhteydet kymmenjärjestelmään ja murtolukuihin on ymmärretty kuin jos laskutoimitusten osaaminen perustuisi vain sääntöihin.

Ymmärtävässä matematiikan oppimisessa pidetään tärkeänä sitä, että oppilaat saisivat itse oivaltaa matemaattiset ideat. Tällainen konstruktivistinen käsitys matematiikan opetuksesta ei ole uusi, vaan jo esimerkiksi Ausubel (1968) on tuonut esille sen, että oppilaiden oma keksiminen ja siihen liittyvä panostus ja motivaatio johtavat parempaan oppimiseen kuin pelkkä tiedon vastaanottaminen. Matematiikan opetuksessa tulisikin keskittyä siihen, että oppilaat saisivat itse rakentaa matemaattista tietoaan, eikä vastaanottaa ideoita opettajalta tai oppikirjasta (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 74; Leino, 2004, s. 20; Patrikainen, 2012, s. 73; D'Angelo & Iliev, 2012). Tällainen oppiminen ymmärretään ”oppijan omana aktiivisena konstruktiona”, joka vaatii oppilaalta aktiivista roolia opiskelussa (Malinen & Pehkonen, 2004, s. 12; Patrikainen, 2012, s. 74). Käytännössä tämä voisi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että oppilas saisi vaikkapa välineiden avulla itse tutkia matemaattista ideaa, eikä vain toistaisi opettajan tai oppikirjan antamaa esimerkkiä.

Yhtenä vaihtoehtona oppilaiden oman keksimisen ja oivaltamisen tukemiseen ehdotetaan ongelmalähtöistä oppimista (esim. Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert, ym., 1997; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 86). Hiebertin ja kumppaneiden (1997) mukaan ymmärrystä tukevat parhaiten tehtävät, joihin oppilaalle ei ole annettu valmista ratkaisumallia, vaan oppilas joutuu itse soveltamaan aiempia tietojaan ja luomaan uutta tietoa, jonka avulla ratkaisu saadaan tuotettua. Tämä voisi toteutua esimerkiksi niin, että jos uutena asiana on kymmenylitykset kaksinumeroisten lukujen vähennyslaskussa, oppilaille ei etukäteen kerrottaisi, miten kymmenylitys laskuissa kannattaa tehdä, vaan oppilaat saisivat itse pohtia parasta tapaa toimia tehtävässä. Koskinen ja Pitkäniemi (2020, s. 85) toteavat, että ongelmalähtöiset strategiat voivat vaikuttaa sekä matematiikan idean käsitteelliseen ymmärtämiseen että idean soveltamiskyvyn kehittymiseen. He pitävät tärkeänä myös opettajan ohjaavaa roolia tällaisten tehtävien tekemisessä. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 29-30) huomauttavat kuitenkin, että oppilaiden ohjaaminen ”sopivasti” voi olla hankalaa, koska oppilaita tulee ohjata riittävästi, että he pääsevät eteenpäin, muttei kuitenkaan niin paljon, että opettaja ratkaisisi tehtävät heidän puolestaan.

Koskinen (2016, s. 163) tuo esille, että vaikka ymmärtävästä matematiikan oppimisesta on puhuttu jo pitkään, siihen ei ole olemassa mitään tiettyä valmista kaavaa tai ohjeistusta. Hiebert ja kumppanit (1997) tuovat kuitenkin esille viisi asiaa, jotka vaikuttavat siihen, tukeeko matematiikan opetus ymmärryksen kehittymistä. Ensinnäkin tehtävien tulisi olla ongelmalähtöisiä, kuten jo edellä kuvattiin. Toiseksi opettajan roolin tulisi olla oppimista ohjaava ja mahdollistava. Kolmantena he tuovat esille opiskelun välineet, joiksi he luettelevat konkreettiset välineet, matematiikan symbolit ja matematiikasta puhumisen. Neljäntenä he painottavat luokan sosiaalista kulttuuria, jossa merkittävää on se, että kaikki oppilaat saavat jakaa ratkaisujaan ja että kaikkien ratkaisut ovat yhtä arvokkaita. Viimeisenä tuodaan esille vielä se, että matematiikan ymmärtämisen tulisi olla mahdollista jokaiselle oppilaalle riippumatta hänen matemaattisista taidoistaan tai henkilökohtaisesta taustastaan. Tutkijat ehdottavatkin, että näihin näkökulmiin keskittymällä opetusta voi kehittää ymmärrystä tukevaan suuntaan. Lisäksi he painottavat, että matematiikan ymmärtäminen vaatii matematiikan pohtimista ja matematiikasta kommunikoimista. Näin ollen matematiikan opetus, jossa kannustetaan pohtimaan ja kommunikoimaan matematiikkaa, tukee matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. (Hiebert, ym., 1997)

Miksi matematiikan ymmärtämistä sitten pidetään niin tärkeänä? Koskisen ja Pitkäniemen (2020, s. 85) mukaan ”käsitteelliseen ymmärtämiseen tähtäävä matematiikan opetus tuottaa parempia oppimistuloksia ja syvällisempää osaamista.” Myös Hiebert ja Carpenter (1992, s. 74-74) tuovat esille matematiikan ymmärtämisestä seuraavia hyötyjä. Ensinnäkin ymmärrys on kumuloituvaa, eli kun aiemmat matematiikan asiat on ymmärretty, on helpompaa ymmärtää uusia asioita. Toisaalta ymmärtäminen tukee myös muistamista; kun esimerkiksi proseduurien osaaminen perustuu ymmärrykseen, yksittäisiä sääntöjä on muistettava vähemmän. Ymmärtäminen lisää myös siirtovaikutusta (transfer), millä tarkoitetaan sitä, että ymmärrettyjä matematiikan asioita on helpompi soveltaa uusiin tilanteisiin. Lisäksi matematiikan ymmärtäminen vaikuttaa oppilaiden uskomuksiin matematiikasta positiivisesti. (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 74-75). Myös Hiebert ja kumppanit (1997, s. 2) uskovat sen vaikuttavan uskomuksiin, sillä matematiikan ymmärtäminen tuottaa tyydytyksen tunnetta ja on palkitsevaa. Vastaavasti, jos asioita ei ymmärrä, ne täytyy muistaa, mikä taas voi tehdä matematiikasta turhauttavaa. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 2) lisäävät myös, että jos matematiikkaa ei ymmärrä, oppii sääntöjä eikä matematiikkaa. Matematiikan ymmärtäminen vaikuttaisi siis tekevän matematiikan opiskelusta ja oppimisesta mielekkäämpää.

Seuraavaksi jatkan ymmärtävän matematiikan opetuksen käsittelemistä ymmärryksen tukemisen näkökulmasta.

2.1.2 Konkreettisuus ymmärryksen tukena

Yksi tapa tukea oppilaiden omaa matemaattista oivaltamista on konkreettisten välineiden käyttö opetuksessa. Tutkimalla ja käsittelemällä matematiikkaa konkreettisten välineiden avulla sitä on mahdollista ymmärtää paremmin (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 70; D'Angelo & Iliev, 2012; Jones & Tiller, 2017, s. 18). Konkreettisilla välineillä tarkoitetaan kaikkia havainnollistavia ja toiminnallisia välineitä, joilla voidaan kuvata matemaattisia käsitteitä ja operaatioita (Lindgren, 1990; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 86). Yleisiä konkreettisia välineitä ovat esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet, värisauvat ja murtokakut.

Kymmenjärjestelmävälineet havainnollistavat sitä, miten kymmenjärjestelmässä kymmenen tultua täyteen siirrytään aina seuraavaan yksikköön. Värisauvoilla puolestaan on mahdollista tutkia esimerkiksi eri lukujen suhteita toisiinsa, ja murtokakut sopivat hyvin murtolukukäsitteen hahmottamiseen. Lisäksi näitä kaikkia välineitä voidaan käyttää apuna myös matemaattisten operaatioiden opiskelussa – esimerkkeinä vaikkapa kymmenjärjestelmävälineiden tai värisauvojen käyttö kymmenylityksen opiskelussa tai murtokakut murtolukujen laskutoimitusten opiskelussa.

Hiebert ja Carpenter (1992) puhuvat matematiikan oppimisesta ulkoisten ja sisäisten mallien (*external and internal models*) näkökulmasta. Ulkoiset mallit voivat olla konkreettisia välineitä, piirustuksia tai toisaalta myös symboliesityksiä matematiikasta. Kun oppilas luo yhteyksiä ulkoisten mallien välille, nämä yhteydet voivat muuttua sisäisten mallien välisiksi yhteyksiksi eli mentaalisiksi malleiksi. Ulkoisten mallien avulla voi tukea sisäisten mallien kehittymistä esittämällä samaa matemaattista ideaa eri malleilla tai käyttämällä samaa mallia eri ideoiden esittämiseen. Esimerkiksi jos opetuksessa käytetään kymmenjärjestelmävälineitä luonnollisten lukujen laskutoimitusten harjoittelussa ja oppilas huomaa yhteyden laskujen symbolisen ja konkreettisen esityksen välillä, tätä samaa yhteyttä voi käyttää apuna myöhemmin opiskelemalla myös desimaalilukujen laskutoimituksia kymmenjärjestelmävälineiden avulla. Tällöin oppilas voi ulkoisten mallien avulla luoda yhteyksiä luonnollisten lukujen laskutoimitusten, desimaalilukujen laskutoimitusten ja kymmenjärjestelmän välille. Ulkoisilla malleilla voidaan siis vaikuttaa oppilaiden sisäisiin malleihin ja niiden välisiin yhteyksiin – eli siihen, miten oppilas ymmärtää matematiikkaa. Toisaalta ulkoisten mallien avulla voidaan saada tietoa myös siitä, mitä sisäisiä malleja oppilaalla on. (Hiebert & Carpenter, 1992.)

Konkreettisten välineiden käyttö on siis tärkeää varsinkin uusia matematiikan käsitteitä tai menetelmiä opiskeltaessa. Ikäheimo ja Risku (2004, s. 228) ehdottavat, että uuden käsitteen opettaminen kannattaisi aloittaa konkreettisilla välineillä operoimalla ja siirtyä oppikirjan tehtävien äärelle vasta myöhemmin. Näin oppilaat voivat kehittää matemaattista ymmärtämistään ulkoisilla malleilla ennen abstraktimpaan toimintaan siirtymistä. Yrjönsuuri (2004, s. 112) korostaa monipuolisen konkreettisen havainnollistamisen tärkeyttä varsinkin nuorilla oppilailla. Nuoret oppilaat korostuvat esimerkiksi siksi, että vanhemmilla oppilailla on usein jo enemmän sisäisiä malleja matematiikan käsitteistä ja menetelmistä, minkä seurauksena he voivat ymmärtää asioita aiempien sisäisten mallien avulla. Konkreettisten välineiden avulla voidaan kuitenkin tukea kaiken ikäisten ja tasoisten oppilaiden oppimista (Häggblom, 2004, s. 44; Boggan, Harper & Whitmire, 2010, s. 3). Kun asiat on ymmärretty ja oppilaat ovat siirtyneet operaatioiden käytössä abstraktimmalle tasolle, välineitä ei enää tarvita, vaan harjoittelua voidaan jatkaa esimerkiksi symboliesitysten avulla (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 68; Slavit, 1998, s. 256).

Konkreettiset välineet voivat toimia tukena myös matematiikasta keskustellessa. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 58) tuovat esille konkreettisten välineiden merkityksen matematiikasta kommunikoidessa. Oppilaat voivat esimerkiksi ratkaista matematiikan tehtäviä yhdessä käyttämällä apuna konkreettisia välineitä tai esittää omia ratkaisujaan muille konkreettisilla välineillä. Myös Häggblomin (2004, s. 45) mukaan konkreettiset välineet voivat olla hyödyksi matematiikasta kommunikoitaessa.

Myös empiiriset tutkimukset tukevat väitettä siitä, että konkreettisten välineiden avulla oppilaiden on mahdollista ymmärtää matematiikkaa paremmin. Lindgren (1990) tutki väitöskirjassaan Matikkatupa-kokeilun vaikutusta toisen luokan oppilaiden ymmärrykseen paikkajärjestelmästä ja yhteen- ja vähennyslaskuista allekkain. Kokeilussa vertailtiin oppilasryhmiä, joista osa osallistui oppikirjakeskeiseen opetukseen ja osa opetukseen, jossa käytettiin konkreettisia välineitä monipuolisesti. Konkreettisten välineiden ja matematiikkapelien avulla opiskelu auttoi oppilaita ymmärtämään paikkajärjestelmän ja oivaltamaan allekkainlaskujen muistinumeroiden ja lainaamisen merkityksen. (Lindgren, 1990.) Cramer ja Post (1995) puolestaan tutkivat konkreettisten välineiden vaikutusta murtolukujen oppimiseen. Heidänkin tutkimuksessaan konkreettisilla välineillä opiskelleet oppilaat saavuttivat syvempää ymmärrystä murtolukujen laskutoimituksista kuin oppikirjan avulla opiskelleet oppilaat, joiden osaaminen perustui oppikirjan antamiin esimerkkeihin.

Kaiken kaikkiaan konkreettisten välineiden avulla vaikuttaa olevan mahdollista tukea tehokkaasti oppilaiden matemaattista ymmärrystä. Välineiden käyttö ei kuitenkaan automaattisesti tuota ymmärtämistä: sillä miten välineitä käytetään, on väliä. Jotta välineiden käyttö tukisi oppilaiden ymmärtävää oppimista mahdollisimman hyvin, oppilaiden tulee muodostaa välineille merkityksiä. Välineitä tulee siis käyttää silloin, kun se on tarpeellista, ei vain harjoittelun vuoksi (Hiebert, ym., 1997, s. 10, 21; Boggan, ym., 2010, s. 3). Seuraavaksi tarkastelen välineiden käytön hyödyllisyyteen liittyviä käsityksiä.

Ensinnäkin konkreettisten välineiden vaikutus matemaattisen ymmärryksen tukemiseen riippuu siitä, miten hyvin välineet vastaavat opiskeltavaa matematiikan sisältöä. Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 66) mukaan esitysmuotojen välisillä yhteyksillä, eli esimerkiksi sillä, miten konkreettinen ja symbolinen esitys vastaavat toisiaan, on vaikutus matematiikan ymmärtävään oppimiseen. Jos konkreettinen materiaali on turhan etäinen ideasta, joka tarkoitus oppia, voi syntyä virheellisiä oivalluksia ymmärtämisen kehittymisen sijaan (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 70-71). Yrjönsuuren (2004, s. 114) mukaan konkreettisen materiaalin onkin mahdollisimman loogisesti vastattava opittavan käsitteen ominaisuuksia, ja näiden ominaisuuksien tulee olla helposti havaittavissa konkreettisesta mallista. Lisäksi hän muistuttaa, että opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota vain konkreettisen mallin oleellisiin ominaisuuksiin. Konkreettisia välineitä käytettäessä tulisi siis valita välineet siten, että ne kuvaavat opittavaa asiaa mahdollisimman selkeästi.

Toisaalta samaa käsitettä kuvaavat konkreettiset välineet voivat korostaa käsitteen eri ominaisuuksia. Hiebertin ja kumppaneiden (1997, s. 10–11) mukaan tietyt välineet voivat siten tukea erilaisia yhteyksiä ja näin muodostaa erilaista ymmärrystä kuin toiset välineet. Hyvä esimerkki tästä on murtolukujen oppimiseen käytettävät konkreettiset välineet. Cramerin ja Wybergin (2009) mukaan lukusuora on hyvä malli murtolukujen jatkuvuuden (kahden eri murtoluvun välillä on loputtomasti murtolukuja) ymmärtämiseen, kun taas murtopalat eivät yhtä hyvin tue jatkuvuuden ymmärtämistä. Koska materiaalit korostavat matemaattisten ideoiden eri seikkoja, tulee materiaali valita sen mukaan, mitä halutaan oppia (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 71-72). Esimerkiksi jos oppilaiden on tarkoitus ymmärtää murtolukujen jatkuvuus, kannattaisi murtopalojen sijaan valita lukusuorat tai jokin muu malli, joka havainnollistaa murtolukujen jatkuvuutta. Yrjönsuuri (2004, s. 114) ehdottaa myös, että samaa käsitettä kannattaisi havainnollistaa monilla erilaisilla malleilla, jotta käsitteen olennaiset asiat tulisivat ilmi selkeämmin.

Konkreettisia välineitä käytettäessä tulee siis kiinnittää huomiota siihen, ovatko ne oikeasti hyödyllisiä oppilaiden ymmärryksen kehittymisen suhteen. Lisäksi on huomattava, etteivät oppilaat välttämättä itse osaa valita sopivia välineitä tai työskentelytapoja, vaan opettajien on usein ohjattava oppilaita välineiden valinnassa sen perusteella, minkä kokevat oppilaalle hyödyllisimmäksi (Lingren, 1990, s. 181; Häggblom, 2004, s. 48). Kun välineet valitaan huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti, ne voivat edistää uusien matematiikan käsitteiden ymmärtämistä (Lindgren, 1990, s. 179; Boggan, ym., 2010, s. 3). Opettajan ohjaava rooli matematiikan opetuksessa korostuu siis myös konkreettisten välineiden valinnassa. Hiebert ja Carpenter (1992, s. 70) huomauttavat myös oppilaiden ennakkotietojen merkityksestä välineiden valinnassa: jos oppilailla ei ole oletettuja ennakkotietoja, konkreettiset välineet voivat luoda sattumanvaraisia oivalluksia, jotka eivät välttämättä tue ymmärrystä. Opettaja tarvitsee välineiden valitsemiseen siis myös tietoa oppilaiden aiemmasta ymmärryksestä. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 63) painottavat kuitenkin, ettei ole olemassa oikeita tai vääriä välineitä matematiikan ymmärtämiseen, vaan eri välineet vaikuttavat siihen, millaista ymmärrystä on mahdollista kehittää.

Konkreettisten välineiden käytössä on tärkeää myös se, että oppilaat pääsevät itse käyttämään niitä. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 21) korostavat, että oppilaat oppivat käyttämään välineitä käyttämällä niitä itse, eivät seuraamalla niiden käyttöä esimerkiksi opettajan demonstraatioissa. Jos välineiden avulla halutaan tukea oppilaiden matemaattista ymmärrystä eikä vain mekaanista operointia, oppilaiden on saatava itse välineitä tutkimalla ja käyttämällä muodostaa merkitys välineille (Hiebert, ym., 1997, s. 168–169).

2.1.3 Kontekstuaalisuus ymmärryksen tukena

Toinen tapa tukea ymmärrystä on kontekstuaalisuus. Oppimisen kontekstuaalisuudessa painottuu Koskisen (2016) väitöskirjassa se, että matematiikan käsitteet ja ideat tulisi liittää oppilaiden omaan kokemusmaailmaan. Matematiikan oppimisprosessin tulisi alkaa opiskeltavana olevaan matematiikan asiaan liittyvästä reaalimaailman kontekstista, joka on oppilaalle tuttu ja todentuntuinen (Simon, 1995; Johanning, 2008). Joutsenlahden (2004, s. 365) mukaan oppilaat oppivat matematiikkaa sitä paremmin mitä enemmän matematiikan tilanteet liittyvät heidän omaan kokemusmaailmaansa. Samalla tavoin Koskinen ja Pitkäniemi (2020, s. 86) korostavat matematiikan yhteyttä oppilaiden arkimaailmaan ymmärryksen kehittymisen näkökulmasta. Esimerkiksi kun alakoulussa harjoitellaan prosentteja, tulisi opiskelu aloittaa siitä, mitä tietoja ja käsityksiä oppilailla on prosenteista koulumaailman ulkopuolelta. Matematiikan liittäminen oppilaiden elämään auttaa myös kasvattamaan mielenkiintoa ja motivaatiota matematiikkaa kohtaan, koska oppilaat havaitsevat, että matematiikkaa todella tarvitaan elämässä (Hiebert, ym., 1997, s. 69–70; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 86).

Arkimaailman kokemusten lisäksi uudet asiat voivat olla yhteydessä oppilaiden aiempiin, koulussa opittuihin matematiikan tietoihin. Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 72) mukaan uudet asiat ymmärretään suhteessa aiempiin tietoihin ja jo olemassa oleviin malleihin. Herscovivs ja Bergeron (1983) taas näkevät ymmärryksen olevan seuraus ajattelusta, joka ei toimi tyhjiössä, vaan muodostuu aina suhteessa aikaisemmin hankittuun tietoon. Jos pohditaan edelleen esimerkiksi desimaalilukujen yhteenlaskuja, on selkeää, ettei laskutoimitusten ideaa voi ymmärtää, ellei se yhdisty ymmärrykseen kymmenjärjestelmästä tai luonnollisten lukujen laskutoimituksista. Ilman näitä yhteyksiä desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku jää irralliseksi tiedoksi, joka toimii ennemmin sääntöjen muistamisen kuin ymmärryksen varassa. Merenluoto ja Lehtinen (2004, s. 302) puhuvat ymmärryksen kehittymisestä suhteessa aiempiin tietoihin osana konstruktivistista oppimiskäsitystä.

Kun ymmärrystä ajatellaan yksilön matemaattisen tietoverkoston kehittymisenä, on yksilön olemassa oleva tietoverkosto merkittävässä osassa. Hiebert ja Carpenter (1992, s. 70) kuvaavat, kuinka tietoverkoston täydentyminen ja järjestyminen riippuvat aina olemassa olevasta tietoverkostosta, koska aiemmat yhteydet vaikuttavat uusiin yhteyksiin. Heidän mukaansa olemassa olevien yhteyksien vaikutus uusiin yhteyksiin kuitenkin vaihtelee:

aiemmat yhteydet voivat uusien yhteyksien tukemisen lisäksi myös rajata uusia yhteyksiä. Lisäksi on mahdollista, että uudet yhteydet eivät liitykään aiempaan tietoverkostoon. Esimerkiksi jos oppilaan aiempien käsitysten mukaan kertolaskun tulos on aina suurempi tai yhtä suuri kuin kerrottavat, voi murtolukujen kertolaskut olla hankalaa yhdistää aiempaan tietoverkostoon ennen kuin käsitys kertolaskusta kehittyy. Näin ollen uuden oppimiseen vaikuttaa paitsi aiempi tieto niin myös se, miten aiempi tieto on järjestynyt (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 80). Yrjönsuuri (2004, s. 112) painottaa vielä, että uusi asia ja uusi käsite ymmärretään vasta, kun ne tulkitaan yhteydessä aiemmin rakentuneisiin tietoihin ja käsitteisiin.

Ymmärtävän matematiikan lähtökohtana tulisi siis olla oppilaiden joko koulussa tai arjessa hankitut aiemmat tiedot matematiikasta. Opetuksen suunnittelussa tulisikin pohtia, mitä tietoja oppilailla jo on ja pyrkiä laajentamaan niitä. Leinon (2004, s. 20–21) mukaan tärkeä osa opettajan opetustyötä on saada selville oppilaiden aiemmat tiedot ja liittää uuden tiedon opettaminen niihin. Kun asioita aletaan alusta alkaen opiskella oppilaiden tiedoista käsin, voivat yhteydet aiempaan tietoon olla selkeämpiä kuin liitettäessä uudet asiat aiempiin tietoihin vasta uuden asian harjoittelun jälkeen (Hiebert & Carpenter, 1992, s. 84). Matematiikan opetuksen lähtökohtana tulisi siis olla aina se, miten opittava matematiikka liittyy oppilaiden omaan elämään tai aiemmin opittuun matematiikkaan. Hihnalan (2005, s. 23) mukaan perusopetuksen vaarana on kuitenkin se, että ”matematiikan asiat yhdistetään aina samaan kontekstiin, jolloin oppilas saattaa runsaan harjoittelun jälkeenkin olla kykenemätön soveltamaan tietoa uuteen tilanteeseen”. Jos siis matematiikan opiskelu yhdistyy aina vain esimerkiksi oppikirjan tehtäviin ja esimerkkeihin, voi matematiikan soveltaminen muissa tilanteissa tuntua haastavalta.

2.1.4 Sosiaalisuus ymmärryksen tukena

Viimeisenä ymmärtävän oppimisen tukemisen keinona käsittelen sosiaalisuutta. Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 86) mukaan matemaattisten ideoiden välisistä yhteyksistä tulee keskustella ja oppilaita tulee kannustaa pohtimaan niitä. Näin yhteydet voivat kehittyä ja tulla selkeämmiksi, mikä taas voidaan nähdä ymmärryksen kehittymisenä. Myös Haapasalo (2004, s. 76) toteaa, että on tärkeää tarjota oppilaille mahdollisuuksia kuvailla omin sanoin matematiikan käsitteitä ja määritelmiä. Käsitän tässä tutkielmassa matematiikan sosiaalisuuden matematiikasta kommunikoimisena, minkä seurauksena matemaattinen ymmärrys kehittyy interaktiivisesti (vrt. Koskinen, 2016, s. 166).

Matematiikan oppitunneilla sosiaalisuus voi näyttäytyä esimerkiksi koko luokan yhteisenä keskusteluna, pienryhmätyöskentelynä tai opettajan ja oppilaan välisenä keskusteluna matematiikasta. Yhteistä näille kaikille sosiaalisuuden muodoille on se, että niissä oppilaat joutuvat tuottamaan matemaattisen ajattelunsa sanalliseen muotoon. Kun matematiikan oppitunneilla sanallistetaan matematiikkaa monipuolisesti, oppilaat oppivat esittämään omaa matemaattista ajatteluaan muille ja selvittämään matematiikan alaan kuuluvia asioita yhdessä kommunikoiden (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417).

Matematiikan kommunikointi edellyttää oppilailta omien matemaattisten ideoiden reflektointia ja kehittää oppilaan kykyä esittää omaa matemaattista ajatteluaan (Hiebert, ym., 1997, s. 45–46). Kun oppilaat selostavat matemaattista toimintaansa ja ajatteluansa suullisesti, matemaattinen ajattelu ja käsitteet jäsentyvät selkeämmin, mikä taas voi johtaa matematiikan syvällisempään ymmärrykseen (Ikäheimo & Risku, 2004, s. 228; Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417). Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 417) kuvaavat matematiikan suullisen kielentämisen prosessia seuraavasti: ”Valmistautuessaan kertomaan muulle ryhmälle ratkaisunsa matematiikan tehtävään opiskelija joutuu ensin jäsentämään ajatteluaan itselleen ja sen jälkeen muotoilemaan sanottavansa muille kuulijoille ymmärrettäviä merkityksiä kantaviksi lauseiksi.” Tällöin ei siis enää riitäkään, että oppilas päässään saa muodostettua oikean ratkaisun, vaan hänen on pystyttävä selittämään, mitä, miten ja miksi hän teki päästäkseen ratkaisuun (vrt. Skemp, 1976, ”mitä ja miksi on milloinkin tekemässä). Myös ääneen ajattelu voi samaan tapaan toimia tehtävien ratkaisun tukena (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417).

Oman ajattelun sanallistamisen lisäksi oppilaat kuulevat matematiikasta keskustellessa myös muiden oppilaiden matemaattista ajattelua ja ideoita. Kun oppilaat esittelevät toisilleen ideoitaan ja ratkaisujaan, he voivat huomata toisten ratkaisuissa asioita, joita eivät olisi yksin huomanneet (Schoenfeld, 1989). Näin oppilaat saavat ratkaisuista keskustelemalla ja niitä vertailemalla monipuolisia keinoja matematiikan tehtävien ratkaisuun, eikä heidän tarvitse jumiutua vain omiin ideoihinsa (Hiebert, ym., 1997, s. 44). Samalla he voivat myös reflektoida omaa matemaattista ajatteluaan suhteessa muiden oppilaiden matemaattiseen ajatteluun (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 418). Oppilaat voivat siis matematiikasta keskustelemalla laajentaa omia käsityksiään matemaattisista ideoista ja siten oppia ymmärtämään matematiikkaa monipuolisemmin ja paremmin.

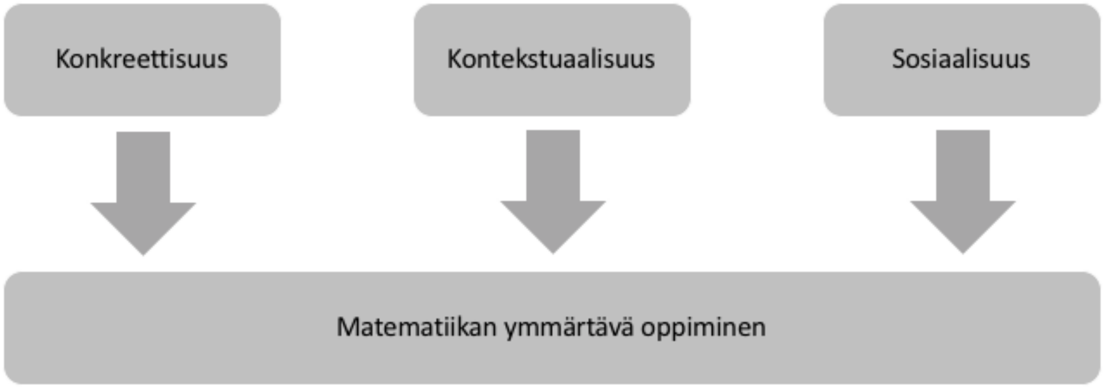
Matematiikasta keskusteleminen on tärkeää myös opetustuokioissa. Keskustelun avulla matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä voidaan rakentaa yhdessä. Opetustuokioissa opettaja voi ohjata oppilaiden keskustelua ja puheenvuoroja esimerkiksi pyytämällä heitä toistamaan toisen oppilaan puheenvuoron omin sanoin, täydentämään muiden oppilaiden ajattelua, vertaamaan omaa ajattelua toisen oppilaan ajatteluun tai pitämällä pohdintataukoja, joiden jälkeen oppilaat jakavat omia ajatuksiaan (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417–418). Lisäksi Hiebert ja kumppanit (1997, s. 72) pitävät koko luokan matematiikkakeskusteluissa tärkeänä sitä, että opettaja on kiinnostunut kuulemaan jokaisen oppilaan matemaattista ajattelua. Matematiikan opetuskeskustelussa on siis tärkeää, että jokainen oppilas pääsee sanallistamaan ajatteluaan ja osallistumaan keskusteluun.

Sen lisäksi että matematiikan puhuminen jäsentää oppilaan matemaattista ajattelua, sitä pidetään tärkeänä osana matemaattisten käsitteiden oppimisprosessia. Galperin (1957) tutki oppilaiden matemaattisten käsitteiden oppimista ja huomasi, että matematiikan puhumisella on tärkeä rooli, kun siirrytään käsitteiden konkreettisesta käsittelemisestä (välineillä) niiden käsittelyyn mentaalisella tasolla. Matematiikan puhumista ääneen voidaankin pitää ikään kuin siltana konkreettisen ja abstraktin ajattelun välillä (Galperin, 1957, s. 220–221; Galperin & Talyzina, 1961, s. 249; Häggblom, 2004, s. 48).

Matematiikan sanallistaminen on myös tärkeä keino oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärryksen selvittämisessä. Hiebertin ja Carpenterin (1992, s. 90) mukaan oppilaiden matemaattista ymmärrystä on vaikeaa arvioida, koska se perustuu oppilaiden sisäisiin ajatusmalleihin, joita ei ole mahdollista havainnoida suoraan. Pehkonen (2011, s. 11) toteaakin, että kommunikoinnilla ja oppilaiden kuuntelemisella on suuri merkitys matematiikan opetuksessa, koska vain keskustelun avulla opettaja voi päästä selville oppilaiden matemaattisesta ajattelusta. Kun oppilaat kuvailevat omin sanoin ratkaisujaan ja matematiikan käsitteitä, opettajalle selviää helposti, onko oppilas ymmärtänyt asiat oikein (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018, s. 417). Hiebert ja Carpenter (1992, s. 90) esittävät, että opettaja voi mitata oppilaiden ymmärrystä esimerkiksi selvittämällä, miten oppilaat selittävät symboliesityksen ja konkreettisten välineiden välistä yhteyttä proseduurissa tai selvittämällä, miten oppilas selittää eri ratkaisutapojen välisiä yhteyksiä. Oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen selvittäminen on tärkeää ymmärtävän matematiikan opetuksen ja oppimisen kannalta, koska jos opettaja ei ole selvillä oppilaiden ymmärryksestä, hän ei voi suunnitella opetusta, jonka lähtökohtana on oppilaiden aiemmat tiedot.

2.1.5 Yhteenveto ymmärtävän oppimisen tukemisen keinoista

Edellisissä alaluvuissa käsittelemäni matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisen keinot on esitetty Kuviossa 1.



Kuvio 1. Matematiikan ymmärtävän oppimisen tukeminen.

Matematiikan ymmärtävää oppimista voidaan siis tukea esimerkiksi konkreettisuuden, kontekstuaalisuuden ja sosiaalisuuden avulla. Konkreettisuuden avulla oppilaiden on mahdollista tutustua matemaattisiin ideoihin ja käsitteisiin oman matemaattisen ajattelunsa tasolla ja näin myös oivaltaa ja rakentaa matemaattista tietoa itse. Jos matematiikkaa opiskellaan suoraan abstraktimmalla tasolla, asioiden ymmärtäminen on haastavampaa tai jopa mahdotonta. Oppilaiden matemaattisen ymmärryksen tukeminen konkreettisen toiminnan avulla vaatii kuitenkin opettajalta ohjausta ja tukea sekä toiminnan suunnittelua.

Ymmärrystä voidaan tukea myös kontekstuaalisuudella, jolla tarkoitetaan matemaattisten asioiden liittämistä oppilaiden aiempiin tietoihin ja kokemuksiin matematiikasta tai omasta arjesta. Tällöin uusien ja aiemmin opittujen asioiden välille voi muodostua yhteyksiä, mikä tukee ymmärryksen kehittymistä. Matematiikan ymmärtämisen tukemisen lisäksi kontekstuaalisuus voi tehdä matematiikan oppimisesta merkityksellisempää ja motivoivampaa.

Sosiaalisuudella tarkoitetaan tässä matematiikasta keskustelemista. Matematiikasta keskustellessa oppilaat joutuvat jäsentämään omaa matemaattista ajatteluaan muille ymmärrettävään muotoon. Keskusteluissa oppilaat kuulevat myös toistensa käsityksiä matematiikasta ja voivat peilata niitä omiin käsityksiinsä. Matematiikan puhumista voidaan pitää myös linkkinä konkreettisen ja abstraktin matemaattisen ajattelun välillä.

2.1.6 Ymmärtävän oppimisen opetus-oppimisprosessi

Edellä kuvattiin kolmea eri näkökulmaa matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisesta. Tässä luvussa esittelen mallin, jossa ymmärtävän oppimisen tukemisen keinot on liitetty osaksi matematiikan opetus-oppimisprosessia. Koskinen (2016, s. 171) esittelee väitöskirjassaan Journal for Research in Mathematics Education -lehden artikkeleiden pohjalta kootun matematiikan opetus-oppimisprosessin. Koskinen puhuu mielekkään oppimisen opetus-oppimisprosessista. Mielekkääseen oppimiseen liittyy ymmärtämisen lisäksi oppimiseen liittyvät tunteet ja motivaatio (Koskinen, 2016, s. 19). Koska keskityn tässä tutkielmassa ymmärtävään oppimiseen ja koska ymmärtävä oppiminen on osa mielekästä oppimista, käytän tutkielmassani termiä ”Ymmärtävän oppimisen opetus-oppimisprosessi”.

Koskisen malli mukailee Galperinin (1957, s. 217–222) mallia matematiikan opetus-oppimisprosessista. Galperin (1957) selvitti tutkimuksessaan, miten kouluikäiset lapset oppivat ja sisäistävät matemaattisia toimintoja niin, että he myös ymmärtävät ne. Tuloksena hän esittelee mallin, jossa matematiikan ymmärtävän oppimisen nähdään tapahtuvan orientaatiotoiminnan, konkreettisen toiminnan ja matematiikasta puhumisen avulla. Koskisen (2016) mallissa on edellisten lisäksi huomioitu kontekstuaalisuus osana opetus-oppimisprosessia. Näin ollen malli sopii hyvin kuvaamaan sitä, miten ymmärtävän oppimisen tukemisen keinot voidaan ottaa huomioon osana matematiikan opetusta ja oppimista.

Koskisen (2016, s. 171) opetus-oppimisprosessissa on huomioitu sekä oppilaan että opettajan toiminta. Malli koostuu viidestä vaiheesta:

1) orientaatiovaihe
2) kontekstuaalisen ja konkreettisen työskentelyn vaihe
3) kielentämisvaihe
4) harjoitteluvaihe ja
5) koontivaihe.

Orientaatiovaiheen tarkoituksena on herättää oppilaan kiinnostus ja motivaatio uutta aihetta kohtaan sekä luoda oppimisvalmiudet, joita uuden asian oppiminen vaatii. Oppilaan on siis saatava käsitys siitä, mitä seuraavaksi ollaan opiskelemassa, minkä lisäksi tulee aktivoida oppilaan aiemmat tiedot aiheeseen liittyen. Kontekstuaalisen ja konkreettisen työskentelyn vaiheessa oppilaan on tarkoitus muodostaa merkitysyhteyksiä reaalimaailman tai konkreettisten välineiden ja matemaattisen abstraktin ilmaisun välille. Opettajan tehtävänä on esitellä käytössä olevat materiaalit, ohjata työskentelyä ja kiinnittää oppilaiden huomiot oleellisiin asioihin. Kielentämisvaiheessa oppilaat kielentävät matematiikkaa suullisesti, mentaalisesti ja kirjallisesti. Opettajan tehtävänä on ohjata ja tukea oppilaiden matematiikan kielentämistä esimerkiksi luokkakeskustelujen ja ryhmäkeskustelujen avulla. Harjoitteluvaiheessa oppilas käyttää ja soveltaa opittua asiaa uusiin tilanteisiin, ja tavoitteena on opitun automatisoituminen. Opettajan tehtävänä on ohjata harjoittelua ja antaa siitä palautetta oppilaille. Koontivaiheessa kerrataan opittua, vahvistetaan syntyneitä merkitysyhteyksiä ja pyritään muodostamaan kokonaiskuva opitusta asiasta esimerkiksi tekemällä yhteenvetoa siitä taululle. (Koskinen, 2016, s. 171.)

Vaikka opetus-oppimisprosessin vaiheet on esitetty etenemisjärjestyksessä, voivat ne Koskisen (2016, s. 172) mukaan todellisuudessa toteutua osittain päällekkäisinä ja niissä voidaan myös tarvittaessa palata taaksepäin. Merkittävää on kuitenkin se, että mikäli opetuksen ja oppimisen toivotaan tuottavan ymmärrystä matematiikasta, tulisi kaikki vaiheet käydä läpi. Etenkin opetus, jossa ohitetaan orientoituminen ja konkreettinen työskentely, johtaa helposti mekaaniseen oppimiseen. (Koskinen, 2016, s. 28.)

2.2 Ymmärtävää oppimista tukeva matematiikan opettaja

Edellisessä luvussa kuvasin erilaisia matemaattisen ymmärryksen tukemisen keinoja. Koskisen ja Pitkäniemen (2020, s. 88) mukaan näiden lähestymistapojen toimivuus riippuu kuitenkin opetuksen suunnittelusta ja oppilaiden ohjauksesta, mikä taas perustuu opettajan tietoon ja ajatteluun. Matematiikan opettajalla, eli alakoulun kontekstissa luokanopettajalla, on siis suuri vaikutus siihen, miten matematiikkaa koulussa opetetaan ja opiskellaan. Suomalaisilla opettajilla on kansainvälisesti verrattuna hyvin itsenäinen rooli opetuksen suunnittelijana ja toteuttajana, koska opetusta ei kontrolloida tai arvioida ylhäältä käsin (Patrikainen, 2012, s. 82; Krzywacki & Portaankorva-Koivisto, 2018, s. 279). Matematiikan oppikirjoissa painottuu proseduraalinen sujuvuus, eli menetelmien mekaaninen osaaminen, jolloin monipuolisen ja ymmärtävän oppimisen tukeminen jää pitkälti opettajan vastuulle (Perkkilä, ym., 2018; Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Koska monipuolista ja ymmärrykseen tähtäävää matematiikan opetusta ei voi rakentaa pelkästään oppikirjojen varaan, on opettajalla oltava riittävät tiedot ja taidot tällaisen opetuksen järjestämiseen (Krzywacki & Portaankorva-Koivisto, 2018, s. 289; Perkkilä, ym., 2018, s. 347). Tässä luvussa käsittelen ensin opettajan tietoja, joita hän tarvitsee matematiikan opetuksen suunnitteluun ja toteuttamiseen, minkä jälkeen pohdin vielä opettajan roolia ymmärrykseen tähtäävässä matematiikan opetuksessa.

2.2.1 Opettajan tieto ja käsitykset

Puhuttaessa opettajan tarvitsemista tiedoista viitataan usein Shulmanin (1986; 1987) jäsennykseen. Shulmanin (1987, s. 8) mukaan opettaja tarvitsee sisältötietoa eli tietoa oppiaineesta, yleistä pedagogista tietoa opetuksen järjestämisestä, pedagogista sisältötietoa tietyn oppiaineen opettamisesta, tietoa opetussuunnitelmasta ja tietoa oppilaista. Lisäksi opettaja tarvitsee tietoa opetuksen kontekstista: opetettavasta ryhmästä, koulun hallinnosta ja rahoituksesta, yhteisöjen ja kulttuurin luonteesta sekä tietoa opetuksen tarkoituksista, arvoista ja filosofisista ja historiallisista lähtökohdista (Shulman, 1987, s. 8). Koska tutkielmani käsittelee matematiikan opetusta, tulen seuraavaksi keskittymään erityisesti opettajan sisältötietoon, pedagogiseen sisältötietoon, tietoon opetussuunnitelmasta ja tietoon oppilaista. Lopuksi käsittelen vielä opettajan matematiikkaan kohdistuvien uskomuksien vaikutusta matematiikan opetukseen.

Sisältötieto (content knowledge). Shulman (1986, s. 9) tarkoittaa sisältötiedolla opettajan tietoa oppiaineesta ja ymmärrystä oppiaineen rakenteesta. Hänen mukaansa ei kuitenkaan riitä, että opettaja osaa kertoa oppilaille ”totuuksia” oppiaineesta, vaan opettajan on osattava myös perustella nämä ”totuudet” – miksi ne pitää oppia ja miten ne liittyvät muihin asioihin. Matematiikan opettajan tulee siis itsekin ymmärtää matematiikkaa voidakseen opettaa sitä ja tukea oppilaiden matemaattista ymmärrystä (ks. myös Hiebert & Carpenter, 1992, s. 90–91). Tossavainen ja Leppäaho (2018, s. 297) puolestaan huomauttavat, että jos opettajalla ei ole riittäviä matematiikan taitoja, saattaa opetus perustua pitkälti ulkoa opetteluun eikä ymmärtämiseen perustuvaan tiedon rakentamiseen. Lisäksi he korostavat opettajan matemaattisen ymmärryksen ja matematiikan soveltamistaidon merkitystä konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen matematiikan opetuksen kannalta (emt. s. 298). Ymmärtävän matematiikan opetuksen ja oppimisen kannalta on siis tärkeää, että opettaja itsekin ymmärtää matematiikkaa. Eihän opettaja voi tarkoituksenmukaisesti tukea esimerkiksi oppilaiden matemaattisen tietoverkoston yhteyksien kehittymistä, jos hän ei itsekään niitä yhteyksiä tunnista.

Pedagoginen sisältötieto (pedagogical content knowledge). Shulman (1986, s. 9) määrittelee pedagogisen sisältötiedon tiedoksi siitä, miten oppiainetta tulisi opettaa: miten opittava asia tulisi esittää, jotta oppilaat voivat sen ymmärtää? Opettajan tulee tietää, mitkä asiat oppiaineessa ovat vaikeita ymmärtää, mitkä helppoja ja mikä niistä tekee helppoja tai vaikeita. Lisäksi opettajilla tulee olla keinoja, joiden avulla he voivat tukea oppilaan ymmärryksen kehittymistä. (Shulman, 1986, s. 9–10). Pedagoginen tieto on siis myös tietoa siitä, miten oppiainetta voi oppia. Matematiikan kohdalla opettajan tulee tietää, mitä toimintatapoja matematiikan eri ideoiden ja käsitteiden opiskelussa kannattaa hyödyntää, jotta oppilaat ymmärtäisivät ne mahdollisimman hyvin. Nämä tiedot kehittyvät usein opettajan uran aikana opettajan toistuvasti suunnittelessa, toteuttaessa ja arvioidessa matematiikan opetustaan (Hashweh, 2005). Koskinen ja Pitkäniemi (2020, s. 92) toteavatkin, että opettajan taito valita sopivat lähestymistavat ja välineet matematiikan opiskeluun näyttää johtavan parempiin oppimistuloksiin. Myös Aaltosen ja Pitkäniemen (2001, s. 415) mukaan matematiikan opetuksen tutkimuksen perusteella oppilaat vaikuttavat oppivan paremmin, jos opetus perustuu opettajan laadukkaaseen pedagogiseen sisältötietoon.

Tieto opetussuunnitelmasta (curricular knowledge). Shulmanin (1986, s. 10) mukaan on tärkeää, että opettaja on selvillä opetussuunnitelmasta eli tietää, mitä oppilaille on tarkoitus opettaa, ja toisaalta myös sen, mitä he tulevat myöhemmin oppimaan. Opetussuunnitelmasta opettaja saa tietoa siitä, missä vaiheessa mitäkin asioita tulisi opettaa. Tämän lisäksi opetussuunnitelma voi antaa myös ehdotuksia menetelmistä, joita opetuksessa tulisi käyttää (Shulman, 1986, s. 10). Matematiikan oppimisen ja ymmärtämisen kumuloituvuuden vuoksi opetussuunnitelman tunteminen on erityisen tärkeää, sillä monia matematiikan asioita ei voi oppia, jos oppilailla ei ole perustietoja, joihin uudet asiat perustuvat. Perkkilä ja kumppanit (2018, s. 347) painottavatkin, että opettajan on tunnettava sekä opetussuunnitelma että oppikirjojen sisällöt hyvin, jotta he voivat suunnitella ja toteuttaa mielekästä matematiikan opetusta.

Tietoa oppilaista (knowledge of learners). Opettajat tarvitsevat tietoa oppilaistaan ja oppilaiden ominaisuuksista (Shulman, 1987, s. 8). Lindgrenin (1990, s. 181) mukaan opettajan tulee olla selvillä oppilaiden tarpeista ja matemaattisesta kehitystasosta, jotta hän voi parhaalla mahdollisella tavalla tukea oppilaiden oppimista esimerkiksi ehdottamalla sopivia tehtäviä tai työskentelytapoja. Myös Perkkilä ja kumppanit (2018, s. 349) painottavat oppilaiden kehitysvaiheen yksilöllistä huomioimista; sen tuntemalla opettaja voi antaa oppilaille mahdollisuuden kehittää matemaattista tietorakennettaan omalta tasoltaan. Jos oppilaan ajattelu ei esimerkiksi ole noussut vielä abstraktille tasolle, voi opettaja ohjata häntä käyttämään konkreettisia välineitä apuna tehtävien teossa. Lisäksi Hiebert ja kumppanit (1997, s. 35) toteavat, että jos opettaja ei tiedä, mitä oppilaat jo osaavat, ei hän voi myöskään tietää, mitä oppilaat voivat seuraavaksi oppia. Tieto oppilaista on siis erittäin tärkeää, jos matematiikkaa halutaan opettaa opetussuunnitelman mukaisella konstruktiivisella otteella.

Opettajien käsitykset. Vaikka opettajilla olisikin kaikkia edellä mainittuja tietoja ja siten valmiudet opettaa matematiikkaa ymmärrykseen tähtäävästi, voi tällainen opetus olla haastavaa, jos opettajan omat kouluajan kokemukset matematiikan opetuksesta ovat hyvin erilaisia. Leinon (2004, s. 26) mukaan opettajan oppilaana saamat käsitykset matematiikasta ja sen opetuksesta voivat muodostua opettajan piilouskomukseksi, joka ohjaa hänen opetustaan, vaikka hän olisikin saanut esimerkiksi opettajankoulutuksessa uudenlaisia käsityksiä opetuksesta. Myös Patrikainen (2012, s. 82) toteaa, että opettajien näkemykset matematiikan oppitunneista perustuvat usein heidän kouluaikaisiin kokemuksiinsa matematiikan tunneista. Ikäheimon ja Riskun (2004, s. 225) mukaan omista koulukokemuksista irtautuminen voi olla opettajille vaikeaa. Pitkän työkokemuksen voidaan kuitenkin olettaa kehittävän taidon suunnitella ja toteuttaa opetusta oman näkemyksen mukaan (Vainionpää & Joutsenlahti, 2010a, s. 154).

Opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisen matematiikan opetuksen suunnitteleminen ja toteuttaminen vaatii opettajilta Pehkosen (2011, s. 22) mukaan kehittynyttä matematiikkakuvaa. Ymmärrykseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteutuminen riippuu siis siitä, onko opettaja onnistunut muuttamaan matematiikkakuvansa omien kouluaikojen mekaanisesta työskentelystä nykyisen opetussuunnitelman mukaiseksi. Matematiikkakuvaan liittyvät myös opettajien matematiikkaan kohdistuvat asenteet, joilla edelleen on vaikutus oppilaiden asenteisiin (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004, s. 397). Jos opettaja pitää matematiikkaa mekaanisena osaamisena ja sääntöjen ulkoa opetteluna, muodostuu hänen oppilailleenkin todennäköisesti tällainen kuva matematiikasta. Opettajien uskomuksilla ja asenteilla matematiikkaa kohtaan on siis suuri vaikutus siihen, miten ja millaista matematiikkaa luokassa opiskellaan.

2.2.2 Opettajan rooli

Viimeiseksi käsittelen vielä sitä, millainen rooli opettajalla on ymmärrykseen tähtäävässä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Hiebertin ja kumppaneiden (1997, s. 29) mukaan opettajan tehtävänä on luoda matematiikan pohtimiseen (reflection) ja kommunikointiin kannustava oppimisympäristö, jossa oppilaiden oma ajattelu on pääosassa. Yksi opettajan tärkeimmistä tehtävistä niin matematiikan kuin muidenkin oppiaineiden opetuksessa on opetuksen suunnittelu. Se, mitä oppitunneilla tehdään, on lähes täysin opettajan päätettävissä. Hiebert ja kumppanit (1997, s. 31) painottavat opetuksen tavoitteiden merkitystä opetuskeinojen valinnassa. Kaiken, mitä matematiikan oppitunneilla tehdään, tulisi tukea tunnin tavoitetta. Krzywackin ja Portaankorva-Koiviston (2018, s. 289) mukaan opettajan tuleekin pohtia, miten eri opetusmenetelmiä on mahdollista hyödyntää näiden tavoitteiden saavuttamisessa. Opettajan valitsemilla menetelmillä taas on Yrjönsuurten (2004, s. 129) mukaan keskeinen vaikutus siihen, miten matematiikkaa opitaan.

Näin ollen opettajalla on opetusta suunnitellessaan oltava valmiudet ottaa huomioon monenlaisia näkökulmia (Krzywacki & Portaankorva-Koivisto, s. 2018, s. 289; Hiebert, ym., 1997, s. 34). Matematiikan opetuksessa opettajan tärkein tehtävä on siis suunnitella oppimisympäristö, jossa matematiikan ymmärtävä oppiminen on mahdollista.

Aiemmissa luvuissa olen kuvannut, miten oppilaiden tulisi saada itse rakentaa matemaattinen tietonsa, eikä vastaanottaa sitä opettajalta (ks. luku 2.1.1). Hiebert ja kumppanit (1997, s. 29) nostavatkin esille dilemman: ”miten ohjata oppilaita riittävästi, mutta ei liikaa?”. Nimittäin jos oppilaat kokevat, että opettaja toivoo heiltä tietynlaista ratkaisutapaa, he voivat hylätä omat ajatuksensa ja käyttää opettajalta vastaanotettuja menetelmiä. Jos oppilaat taas jätetään täysin oman onnensa nojaan, voi matematiikan tarkoituksenmukainen pohtiminen jäädä vähäiseksi. (Hiebert, ym., 1997, s. 30.) Oppilaiden matemaattista toimintaa tulisi siis pystyä haastamaan ja tukemaan sopivasti, muttei kuitenkaan niin paljon, että opettaja esimerkiksi antaa heille ratkaisutavan valmiina. Koskisen ja Pitkäniemen (2020, s. 92) mukaan tärkeintä on, että opettajan ohjaus ei rajaa pois oppilaan omaa luovaa ajattelua, vaan se vain tukee oppilaan toimintaa.

Hiebert ja kumppanit (1997, s. 40–41) korostavat opettajan roolin osalta myös sitä, ettei opettajan tulisi olla matematiikan tehtävien oikeellisuuden (correctness) määrittäjä. Tällä he tarkoittavat sitä, että oppilaiden ei tulisi kysellä opettajalta, onko tehtävä mennyt oikein, tai että opettajan ei tulisi välttämättä kertoa oppilaille, onko ratkaisut oikein. Sen sijaan oppilaan tai oppilaiden yhdessä tulisi arvioida vastauksiaan matematiikan logiikkaan perustuen ja siten selvittää, onko tehtävä mennyt oikein. Jos oppilaan ratkaisu on virheellinen, selviää sekin usein keskustelemalla ratkaisusta yhdessä muiden oppilaiden tai opettajan kanssa. (Hiebert, ym., 1997, s. 40–41.)

3 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää matematiikan opetuksesta kiinnostuneiden ja siihen erityisesti perehtyneiden luokanopettajien käsityksiä oppilaiden matematiikan ymmärtävän oppimisen ja matemaattisen ymmärryksen kehittymisen tukemisesta. Tarkoituksena on ensinnäkin selvittää, mitkä opetusmenetelmät ovat tällaisten luokanopettajien mielestä tärkeitä oppilaiden matemaattisen ymmärryksen tukemisen kannalta. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, millä muilla asioilla on vaikutusta siihen, tukeeko matematiikan opetus oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä.

Tutkimuskysymykseni on:

1. Mitkä tekijät ovat luokanopettajien käsitysten mukaan merkittäviä matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisen kannalta?

4 Tutkimuksen toteutus

Tutkielman aineiston analyysi toteutettiin laadullisen sisällönanalyysin keinoin. Tässä luvussa kuvaan tutkielman toteutuksen vaihe vaiheelta peilaten sitä laadullisen tutkimuksen teoriaan. Ensimmäiseksi avaan laadullista sisällönanalyysia menetelmänä, minkä jälkeen esittelen tutkielmani aineiston ja käsittelen haastattelua aineistonkeruumenetelmänä. Lopuksi kuvaan vielä tarkemmin aineiston analyysia prosessina.

4.1 Laadullinen sisällönanalyysi

Laadullinen tutkimus määritetään usein suhteessa määrälliseen tutkimukseen: sen vastakohtana tai kritiikkinä sille (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 65). Laadullisessa tutkimuksessa tavoitteena ei ole tilastollisesti yleistettävät tulokset, kuten määrällisessä tutkimuksessa, vaan eri ilmiöiden, toiminnan ja tapahtumien kuvaaminen ja ymmärtäminen (Eskola & Suoranta, 1998, s. 61, 66). Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 28) kutsuvatkin laadullista tutkimusta ymmärtäväksi tutkimukseksi verraten sitä luonnontieteelle tavanomaiseen selittävään tutkimukseen. He huomauttavat kuitenkin, että laadullisen ja määrällisen tutkimuksen vastakkainasettelu voi olla turha, koska tutkimusotteita voidaan yhdistellä (emt. s. 65). Tutkielmani tavoitteena on selvittää, mitä asioita luokanopettajat pitävät tärkeinä ymmärtävää oppimista tukevassa matematiikan opetuksessa, joten koen laadullisen tutkimusotteen sopivan tutkielmaani hyvin.

Koska laadullisessa tutkimuksessa ei tähdätä tilastollisesti uskottaviin tuloksiin, siinä voidaan keskittyä usein vain pieneen aineistoon ja analysoida sitä mahdollisimman perusteellisesti (Eskola & Suoranta, 1998, s. 18; Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 85). Tällöin tutkimuksen uskottavuuden kannalta merkittävässä osassa on sen teoreettinen viitekehys. Teoreettisella viitekehyksellä Tuomi ja Sarajärvi (2009, s. 18) tarkoittavat teoriaa tutkimuksen keskeisistä käsitteistä ja niiden välisistä yhteyksistä, eli sitä, mitä tutkittavasta aiheesta jo tiedetään. Tutkimuskysymyksiin vastatessaan tutkijan tulisi pyrkiä teorian ja empiiristen havaintojen väliseen vuoropuheluun (Helenius, Salonen-Hakomäki, Vilkka, Saaranen-Kauppinen & Eskola, 2015, s. 192–193), minkä vuoksi on tärkeää, että tutkija perehtyy teoriaan huolellisesti (Salo, 2015, s. 181).

Usein laadullisen tutkimuksen aineistona on jokin teksti. Teksti voi olla tuotettu tutkijan toimesta, esimerkiksi litteroituna haastatteluna tai kyselylomakkeen vastauksina, tai riippumatta tutkijasta, kun aineistona on vaikkapa päiväkirjamerkinnät. (Eskola & Suoranta, 1998, s. 15.) Aineistoni koostuu yhteensä noin 70 sivun haastattelulitteraateista, joten koin sisällönanalyysin sopivaksi menetelmäksi, koska sen tarkoituksena on tiivistämisen ja luokittelun avulla järjestää suuret tekstiaineistot selkeämpään ja helpommin tulkittavaan muotoon niin, että se kuitenkin säilyttää sisältämänsä informaation (Salo, 2015, s. 169; Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 108). Kun aineisto kuvaa tutkittavaa ilmiötä, on Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 103, 108) mukaan sisällönanalyysin tarkoitus tuottaa ilmiöstä sanallinen kuvaus yleisessä muodossa. Lisäksi sisällön analyysissa pyritään löytämään tekstistä merkityksiä (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 104). Sen lisäksi, että sisällönanalyysia voi käyttää yksinään metodina, voidaan sitä Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 91) mukaan käyttää analyysin työkaluna myös muissa metodeissa.

Analyysia ohjaa usein induktiivinen tai deduktiivinen päättely. Induktiivisella päättelyllä tarkoitetaan aineistolähtöistä analyysia, jossa aineistosta tehdyistä havainnoista pyritään johtamaan teoria, eli jonkinlainen yleistys (Brinkmann, 2014, s. 721; Tuomi & Sarajärvi, 2018). Deduktiivinen päättely taas tarkoittaa teorialähtöistä lähestymistä, jossa teoriasta nousseita hypoteeseja pyritään testaamaan empiirisen aineiston avulla (Brinkmann, 2014, s. 721; Tuomi & Sarajärvi, 2018). Tässä tutkielmassa en pyrkinyt sovittamaan aineistoani valmiiseen teoriaan eikä tavoitteeni ollut myöskään luoda aineistoni pohjalta yleistettävissä olevaa teoriaa, vaan ennemmin ymmärtää mahdollisimman hyvin matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemista ja mahdollistamista. Brinkmann (2014, s. 722) ehdottaakin vaihtoehdoksi induktiiviselle tai deduktiiviselle päättelylle abduktiivista päättelyä, jonka tarkoituksena ei niinkään ole aineiston ja teorian välisen suhteen käsitteleminen vaan ymmärryksen muodostaminen jostakin ilmiöstä. Näin abduktiivista päättelyä ohjaa hänen mukaansa ennen kaikkea halu tai tarve ymmärtää ja selittää jotakin ilmiötä (emt.)

Tässä tutkielmassa tavoitteenani on saada tietoa siitä, miten alakoulun matematiikan opetuksessa olisi mahdollista saavuttaa tavoitteet ymmärtävästä oppimisesta. Tavoite nousi sekä omista kokemuksistani ja mielenkiinnostani että aiemmissa tutkimuksissa havaituista haasteista matematiikan opetuksessa. Ennen aineiston keräämistä perehdyin teoriaan matematiikan ymmärtävän oppimisen haasteista ja tukemisesta. Koska matematiikan ymmärrykseen liittyvä tutkimus on hyvin laajaa ja monipuolista, oli teorian rajaaminen hankalaa siinä vaiheessa. Päätin kerätä aineiston ja aloittaa sen analysoinnin, jotta saisin vihjeitä siitä, mihin minun kannattaa teoriassa keskittyä, jotta sekä tutkielmani teoreettinen että empiirinen osa tukisivat parhaalla mahdollisella tavalla tutkimukseni tavoitetta. Lopulta teoriaosa ja analyysi muodostuivat samanaikaisesti jatkuvassa vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Tutkielmani teoria ja aineisto siis tukivat päättelyäni, mutta kumpikaan ei varsinaisesti ohjannut sitä, vaan tutkimusprosessia ohjasi haluni ymmärtää ilmiötä mahdollisimman perusteellisesti. Näin ollen tutkimukseni eteneminen vastaa pitkälti Brinkmannin (2014) kuvausta abduktiivisesta päättelystä.

Kun aiempi tieto tutkimusaiheesta ohjaa analyysia, tutkijan on tiedostettava, miten teoreettinen tieto ja tutkijan omat ennakkokäsitykset vaikuttavat aineiston tulkintaan ja toisaalta myös sen hankintaan. Högbacka ja Aaltonen (2015, s. 9) Kutsuvat tätä tutkijan refleksiivisyydeksi. Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 20) mukaan tutkimus on aina subjektiivista, koska tutkija itse määrittää tutkimuksensa asetelman oman ymmärryksensä varassa. Tutkimuksen objektiivisuutta voi kuitenkin lisätä siten, että tutkija tunnistaa ja ottaa huomioon oman subjektiivisuutensa: oletuksensa ja arvostuksensa (Eskola & Suoranta, 1998, s. 17, 20). Toisaalta refleksiivisyys voi Salon (2015, s. 186) mukaan tarkoittaa myös oman tutkimusasetelman rajallisuuden tiedostamista. Olen pyrkinyt lisäämään refleksiivisyyttä tutkielmaani pohtimalla omia ennakkokäsityksiäni ymmärtävää oppimista tukevasta matematiikan opetuksesta ja niiden vaikutusta sekä haastattelujen toteuttamiseen että haastatteluista tekemiini tulkintoihin. Näitä pohdintoja tuon tarkemmin esille seuraavissa alaluvuissa.

4.2 Tutkimuksen aineisto

Tämän tutkielman aineisto koostuu kuuden Uudellamaalla työskentelevän opettajan haastatteluista. Viisi haastateltavista toimii luokanopettajana, ja yksi haastateltavista toimii luokanopettajan työtä vastaavassa tehtävässä alakoulussa ja on koulutukseltaan luokanopettaja. Haastattelut toteutettiin huhti-toukokuussa vuonna 2020, ja niiden kestot vaihtelivat puolesta tunnista tuntiin riippuen haastateltavan aktiivisuudesta. Neljällä haastateltavalla oli luokanopettajan pätevyyden lisäksi matematiikan aineenopettajan pätevyys.

Haastateltavilla oli kokemusta luokanopettajan työstä neljästä vuodesta yli kolmeenkymmeneen vuoteen, ja puolet haastateltavista oli työskennellyt luokanopettajana yli kymmenen vuotta. Kaikki haastateltavien nimet ovat pseudonyymejä. Haastateltavien taustatiedot on koottu taulukkoon 1.

Taulukko 1. Haastateltavien taustatiedot

Haastateltavan tunnus	Matematiikan aineenopettajan pätevyys	Työkokemus vuosina	Opetettava luokka-aste haastattelun aikana
Maria	kyllä	16	5. luokka
Sanni	kyllä	5	2.-3. luokka
Marko	kyllä	yli 30	4. luokka
Jenni	kyllä	4	4. luokka
Tuula	ei	6	5. luokka
Teemu	ei	15	6. luokka

Laadullisessa tutkimuksessa tutkittavien valinta sattumanvaraisesti ei ole tarkoituksenmukaista, vaan tutkittavat tulee valita harkitusti ja tarkoitukseen sopivasti (Eskola & Suoranta, 1998, s. 18; Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 75–76). Tällaisessa harkinnanvaraisessa otannassa tutkimuksen teoreettiset lähtökohdat ohjaavat aineiston hankkimista (Eskola & Suoranta, 1998, s. 18). Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 74–75) mukaan tutkimuksen tiedonantajiksi kannattaa valita henkilöitä, joilla on mahdollisimman paljon tietoa ja kokemusta tutkittavasta ilmiöstä. Koska tutkin ymmärtävän oppimisen tukemista matematiikan opetuksessa, valitsin haastateltavikseni henkilöitä, joiden uskon tietävän aiheesta paljon. Kaksi haastateltavista oli minulle valmiiksi tuttuja luokanopettajia, joiden tiedän olevan innostuneita matematiikan opetuksesta ja jotka ovat tuoneet esille pyrkivänsä opettamaan matematiikkaa ymmärrystä tukevasti. Loput neljä haastateltavaa ovat henkilöitä, joita graduohjaajani aiheeni perusteella suositteli minulle haastateltaviksi samoin perustein.

Kuuden haastattelun aineistoni on melko pieni, mikä on Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 85) mukaan laadulliselle tutkimukselle tyypillistä. Koska laadullisessa tutkimuksessa ei pyritä tulosten yleistettävyyteen, voidaan aineiston riittävää kokoa Eskolan ja Suorannan

(1998, s. 62) mukaan arvioida saturaation avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että aineisto on riittävä, kun haastattelut eivät enää tuota tutkimusongelman kannalta uutta tietoa. He huomauttavat kuitenkin, että saturaation saavuttaminen on mahdotonta, jos tutkija ei ole selvillä siitä, mitä aineistostaan hakee (emt. s. 63). Haastatteluja toteuttaessani huomasin, että jo muutaman haastattelun jälkeen haastateltavien esille tuomat ajatukset alkoivat toistua. Näin kuusi haastattelua oli sopiva määrä riittävän saturaation saavuttamisen.

Valitsin aineistonkeruumenetelmäksi haastattelun, joka on yksi laadullisen tutkimuksen yleisimmistä aineistonkeruumenetelmistä, koska sen avulla voidaan selvittää, mitä ihminen ajattelee tietystä asiasta tai miksi hän toimii tietyllä tavalla (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 71–72; Eskola & Suoranta, 1998, s. 86). Koska halusin tietää, mitä asioita luokanopettajat pitävät tärkeinä ymmärtävän oppimisen tukemisessa matematiikan opetuksessa, sujuvin tapa oli kysyä sitä heiltä itseltään. Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 73) mukaan haastattelun etu on se, että siinä on mahdollista toistaa kysymyksiä, oikaista väärinkäsityksiä ja pyytää tarkennusta haastateltavien vastauksiin. Alun perin minun oli tarkoitus käydä myös seuraamassa yksi matematiikan oppitunti jokaiselta haastateltavalta, mikä on Ruusuvuoren Nikanderin ja Hyvärisen (2010, s. 11) mukaan yleinen tapa täydentää haastattelututkimusta, mutta koronavirukseen liittyvien rajoitusten vuoksi se ei ollut haastattelujen aikaan mahdollista.

Ennen haastatteluja olin laatinut haastattelurungon (Liite 1), jossa haastattelun aihepiirit oli jaettu teemoihin ja niitä tarkentaviin kysymyksiin, joihin haastateltavat sitten vastasivat omin sanoin. Haastatteluni olivat siis puolistrukturoituja teemahaastatteluja (Eskola & Suoranta, 1998, s. 87; Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 75). Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 75) mukaan haastattelujen teemojen tulee perustua tutkimuksen teoreettiseen viitekehykseen, ja näin oli myös minun laatimissa haastatteluissa. Teemahaastattelun etu verrattuna esimerkiksi strukturoituun haastatteluun on se, että haastateltava voi puhua vapaasti ilman ohjaavia vastausvaihtoehtoja, jolloin aineiston voidaan ajatella edustavan haastateltavien omaa ajattelua (Eskola & Suoranta, 1998, s. 88; Brinkmann, 2018, s. 579). Omissa haastatteluissani haastateltavat vastasivat kysymyksiini pääosin hyvinkin monipuolisesti ja toivat vastauksissaan esille paljon omaa persoonaansa, esimerkkejään ja ajatteluaan. Oli myös hienoa huomata, miten eri haastateltavat innostuivat eri teemoista ja eri kysymyksien vastausten pituudet vaihtelivatkin haastattelujen välillä, mikä onkin teemahaastatteluille tyypillistä (Eskola & Suoranta, 1998, s. 87).

Haastattelun tarkoituksena on saada tutkimuksen aiheesta mahdollisimman paljon tietoa (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 73). Haastattelujen suunnitteluun on siis syytä panostaa. Ruusuvuoren ja kumppaneiden (2010, s. 9) mukaan haastattelukysymykset eroavat selkeästi tutkimuskysymyksistä, joten minun oli pohdittava tarkkaan, millä kysymyksillä saisin haastateltavilta parhaiten tietoa tutkimuskysymyksiini liittyen. Tutkimuksen luotettavuuden kannalta on myös tärkeää, että haastateltavat ymmärtävät kysymykset oikein (Helenius, ym., 2015, s. 200). Jos haastattelukysymykset ovat liian tulkinnanvaraisia, on mahdollista, että haastattelija ja haastateltava puhuvatkin huomaamattaan aivan eri asioista, mikä luonnollisesti ei ole tutkimuksen kannalta tarkoituksenmukaista.

Laadin haastattelurungon perusteellisesti Eskolan ja Suorannan (1998, s. 89) suosituksen mukaisesti. Aluksi pohdin tarkasti, mitä haluan tietää ja mitä minun silloin tulee kysyä. Haastattelurungon työstämisen aikana tein kaksi pilottihaastattelua ja käytin runkoa kommentoitavana sekä graduseminaarissamme että useampaan kertaan graduohjaajillani. Pilottihaastatteluiden ja ohjaajien kommenttien perusteella tarkensin vielä joitakin kysymyksiä ja muutin hieman teemojen järjestystä. Kuvasin haastattelun aihetta ja tarkoitusta haastateltaville jo ennen haastatteluja, jotta he saivat etukäteen käsityksen siitä, mitä haastattelu koskee.

Huolellisen suunnittelun lisäksi haastattelun onnistumiseen vaikuttaa haastattelun vuorovaikutusilmapiiri. Eskola ja Suoranta (1998, s. 94) painottavat, että haastattelun lopputuloksen kannalta merkittävää on, saavuttaako tutkija haastateltavan luottamuksen. Högbacka ja Aaltonen (2015, s. 17) lisäävät, että “tutkimukseen vaikuttavat kaikki sen osapuolet yhdessä”. Haastattelun sujumiseen ei siis vaikuta pelkästään tutkijan laatimat kysymykset ja haastateltavan antamat vastaukset, vaan myös se, millainen vuorovaikutus heidän välilleen syntyy. Koronaviruksesta johtuvan poikkeustilanteen vuoksi järjestin haastatteluni videopuheluina joko Zoomissa tai Microsoft Teamsissa haastateltavan toiveesta riippuen. Ennen haastatteluja jännitin melko paljon, miten vuorovaikutus videopuhelun välityksellä onnistuu, mutta yllätyin positiivisesti. Kaikissa haastatteluissa oli mielestäni hyvä tunnelma: haastateltavat kertoivat aiheesta innokkaasti ja pysähtyivät itsekin välillä pohtimaan matematiikan opetuksen monimutkaisuutta. Osa haastateltavista innostui myös piirtämään minulle esimerkkikuvia ja esittelemään matematiikan opetusvälineitään. Koen, että onnistuimme yhdessä haastateltavien kanssa luomaan haastatteluihin mukavan ilmapiirin poikkeusoloista huolimatta.

4.3 Tutkimuksen kulku

Käytin analyysin etenemisen mallina Tuomen ja Sarajärven (2018, s. 104) kuvausta laadullisen analyysin vaiheista. Ennen analyysin aloittamista on tehtävä selkeä päätös siitä, mikä aineistossa kiinnostaa. Kun päätös on tehty, aineistoon merkitään kiinnostusta vastaavat kohdat ja ne kerätään yhteen. Kaikki muu aineiston sisältö jää analyysin ulkopuolelle. Seuraavaksi rajattu aineisto luokitellaan, teemoitellaan tai tyypitellään, ja lopuksi analyysista kirjoitetaan yhteenveto. (Tuomi & Sarajärvi, 2018, s. 104.)

Toteutin ja litteroin kaikki tutkielmani haastattelut itse. Tästä syystä aineistoni oli minulle tuttu jo ennen analyysin aloittamista, mitä sekä Ruusuvuori ja kumppanit (2010, s. 13) että Eskola ja Suoranta (1998, s. 152) pitävät analyysin kannalta tärkeänä. Haastatteluaineiston rajaaminen tuntuikin aluksi haastavalta, koska jo litteroinnin aikana kiinnitin huomiota moniin mielenkiintoisiin aiheisiin. Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 92) mukaan aineistosta on valittava tarkasti rajattu ilmiö, josta sitten kerrotaan kaikki mahdollinen. Rajauksen tulee olla johdonmukainen ja perustua tutkimustehtävään (Ruusuvuori, ym., 2010, s. 15; Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 109). Koska tutkielmani tehtävä on selvittää, mitä asioita matematiikan opetukseen orientoituneet luokanopettajat pitävät matematiikan opetuksessa tärkeinä ymmärtävän oppimisen tukemisen kannalta, oli rajaus lopulta kuitenkin helppo: keskityin aineistossa niihin seikkoihin, joiden merkitystä haastateltavat korostivat matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisen suhteen. Monet muut varsin mielenkiintoisetkin seikat jouduin jättämään tutkielmani ulkopuolelle.

Aloitin analyysin koodaamalla aineiston eli etsimällä aineistosta tutkimukseni kannalta olennaisia tekstipätkiä ja merkitsemällä ne niitä kuvaavilla pelkistetyillä ilmauksilla eli koodeilla (Eskola & Suoranta, 1998, s. 156). Ennen koodaamista minun piti määrittää analyysiyksiköt eli valita, minkä mittaisia tekstipätkiä koodaan. (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 110). Aloitin ensin koodaamaan aineistoa virke kerrallaan, mutta huomasin nopeasti, että vapaasti tuotetussa puheessa monet ajatukset jakautuvat useampaan virkkeeseen. Muutin analyysiyksiköksi ajatuskokonaisuuden, koska se tuntui olevan tutkimukseni kannalta tarkoituksenmukaisempaa. Näin ollen osa analyysiyksiköistä oli yhden virkkeen ja osa useamman virkkeen mittaisia. Taulukossa 2 on esimerkkejä aineiston kohdista tehdyistä pelkistetyistä ilmauksista eli koodeista.

Taulukko 2. Esimerkit aineistositaattien pelkistämisestä.

Koodi	Aineistositaatti
Oppilaan matemaattisen ymmärryksen selvittäminen keskustelemalla	”No siinä mä edelleen kanssa niinku nostasin tosi tosi tärkeeks sen niinku matematiikan puhumisen. Et sil se se se kieli on must se millä saadaan niinku aito käsitys siitä, että onks siellä sitä ymmärrystä takana.” (Maria)
Opettaja tarvitsee sisältötietoa	”No ehkä niinku sitä, että et jos ei sitä matematiikkaa jollain tavalla ymmärrä ja niihi tavallaan niinku, et miten se käsite rakentuu ja mitä siihen sisältyy, ni sit myöskää sen niinku opettamista ei voi ehkä niin hyvin suunnitella.” (Teemu)
Opetuksen suunnittelu lähtee opetussuunnitelmasta	”Mut tietysti opsin mukaan pitää toimia.” (Marko)

Kun olin koodannut aineistoni kertaalleen, tarkastelin koodejani ja huomasin, että monet saman tyyppiset koodit toistuvat aineistossa. Kävin koko aineiston vielä uudelleen läpi ja samalla yhdistelin ja tarkensin koodeja, jotka kuvasivat samoja asioita. Lisäsin myös joitakin uusia koodeja, joita en ollut tullut ajatelleeksi ensimmäisellä koodauskierroksella. Eskolan ja Suorannan (1998, 2. 152, 158) mukaan koodausrungon muuttuminen on luonnollista, kun tutkijan käsitys koko aineistosta vähitellen jäsentyy ja selkenee. Toisen koodauskierroksen jälkeen kävin aineiston ja koodit vielä kertaalleen läpi ja tarkastin, että koodaus on tehty huolellisesti. Joka kerta käydessäni aineistoa läpi mieleeni tuli uusia näkökulmia, joiden valossa olisin voinut jatkaa koodaamista. Eskola ja Suoranta (1998, s. 158) muistuttavat kuitenkin, että laajan aineiston kaiken kattava koodaaminen on mahdotonta, joten kolmannen koodauskierroksen jälkeen totesin, että koodaukseni oli riittävä. Lopulta koodeja oli 182 kappaletta.

Koodaamisen jälkeen siirryin aineiston järjestämiseen. Tuomen ja Sarajärven (2009, s. 93) mukaan aineistoa voi järjestää luokittelemalla, teemoittelemalla tai tyypittelemällä. Yksinkertaisin tapa järjestää aineisto on luokittelu, jossa aineistosta muodostetaan luokkia ja lasketaan, miten usein kukin luokka esiintyy. Teemoittelussa aineistoa järjestetään erilaisten teemojen mukaan ja tarkastellaan, mitä kustakin teemasta on sanottu. Tutkija voi itse valita, tarkasteleeko hän teemoja myös niiden esiintymismäärän mukaan vai ei. Tyypittelyssä pyritään järjestämään aineisto teemoittelun avulla ja sitten tiivistämään teemojen sisältämät näkemykset yleistyksiksi. (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 93) Teemoittelu tuntui aineistoni kannalta järkevimmältä vaihtoehdolta, joten päätin järjestää aineistoni sitä mukaillen. Eskola ja Suoranta (1998, s. 179-180) toteavat, että teemoittelu on sopiva analysointikeino, kun halutaan vastauksia käytännön ongelmiin. Näin ollen se on mielestäni sopiva keino pyrkiä selvittämään, miten alakoulun matematiikan opetuksessa voitaisiin tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä paremmin. Lisäksi Eskola ja Suoranta (1998, s. 176) korostavat teorian ja empirian vuorovaikutuksen merkitystä teemoittelussa, minkä pyrin ottamaan huomioon tutkimukseni tulosten tulkinnassa.

Aloitin teemoittelun muodostamalla koodeista teemoja tutkimuskysymykseni ohjaamana. Kutsun tässä vaiheessa teemoja selkeyden vuoksi vielä luokiksi. Aluksi muodostin koodeista 22 alaluokkaa, jotka sitten kokosin vielä kahdeksaan yläluokkaan. Yläluokat kokosin kahteen teemaan: Opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät ja Opettajaan liittyvät tekijät. Alaluokat, yläluokat ja teemat on esitetty taulukossa 3.

Taulukko 3. Teemat, yläluokat ja alaluokat.

Teemat	**Yläluokat**	**Alaluokat (koodit)**
Opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät	Orientaatiovaihe	Uuteen aiheeseen orientoituminen (3)
	Konkreettinen vaihe	Konkreettisuus tukee ymmärrystä (9) Pedagogisia huomioita välineiden käyttöön (18) Piirtäminen ymmärryksen tukena (2)

	Harjoitteluvaihe	Oppikirjat (21) Digimateriaalit (5) Kotitehtävät (3) Toistot (3) Struktuuri (3) Pedagogiset ratkaisut (5)
	Matemaattisen tietoverkoston kehittyminen	Tietoverkoston kehittyminen (4)
	Matematiikan soveltaminen	Matematiikan soveltaminen (8)
	Matematiikkapuhe	Matematiikan sanallistaminen (5) Oppilaiden välinen vuorovaikutus (2) Oppilaan ja opettajan välinen vuorovaikutus (4)
Opettajan rooli ymmärryksen tukemisessa	Opettajan tieto	Sisältötieto (4) Pedagoginen sisältötieto (7) Tieto oppilaista (2)
	Opetuksen suunnittelu	Tavoitteet ohjaavat opetusta (9) Sisältöjen valitseminen (10) Opettajan vastuu ymmärryksen tukemisessa (2) Kollegiaalinen yhteistyö (3)

Osa koodeista rajautui lopulta tutkimuskysymykseni ulkopuolelle. Nämä koodit liittyivät esimerkiksi opettajan suunnittelutyön kuormittavuuteen, oppilaiden motivoimiseen tai opetukseen liittyviin seikkoihin, jotka eivät liittyneet varsinaisesti matemaattisen ymmärryksen tukemiseen. Lopulliseen analyysiin valitsin 132 koodia (Liite 2). Seuraavassa luvussa esittelen analyysini lopputuloksen, eli tutkimukseni tulokset.

5 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Tässä luvussa kuvaan tutkielmani tuloksia sekä niistä tekemiäni tulkintoja. Haastateltavat toivat esille useita matematiikan oppimiseen liittyviä tekijöitä, jotka yhdessä muodostavat matematiikan opetus-oppimisprosessin. Lisäksi haastatteluissa korostui opettajan sekä hänen tietojen ja taitojen vaikutus edellä mainitun prosessin toteutumiseen. Käsittelen näitä kahta teemaa seuraavissa alaluvuissa, joista ensimmäisessä käsittelen ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen opetus-oppimisprosessiin liittyviä tekijöitä ja toisessa opettajaan liittyviä tekijöitä.

5.1 Opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät

Oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä kuvattiin prosessina, joka alkaa uuteen aiheeseen orientoitumisesta ja konkreettisesta toiminnasta, joiden avulla oppilaiden on mahdollista muodostaa ymmärrystään uudesta asiasta. Kun oppilaille on muodostunut käsitys uudesta asiasta, sitä harjoitellaan esimerkiksi oppikirjan tehtävien avulla. Oppilaiden matemaattisen tietoverkoston kehittyminen ja kyky soveltaa matematiikkaa nähtiin ymmärryksen tuloksena. Matematiikasta keskustelemista pidettiin tärkeänä oppilaiden matemaattisen ajattelun tukemisen keinona niin orientaatiovaiheessa, konkreettisessa vaiheessa kuin harjoitteluvaiheessakin. Lisäksi matematiikasta keskustelemista pidettiin hyvänä keinona arvioida oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä.

5.1.1 Orientaatiovaihe

Opetus-oppimisprosessin ensimmäinen vaihe on orientaatiovaihe, joka muodosti oman yläluokkansa. Haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että matematiikan oppiminen lähtee oppilaiden aiemmista tiedoista. Tärkeänä pidettiin ensinnäkin sitä, että matematiikan opiskelu liittyy oppilaiden arkikokemusten kannalta tuttuihin tilanteisiin. Toiseksi korostettiin myös sitä, että uudet asiat tulee liittää aiemmin opittuihin asioihin. Uuteen matematiikan sisältöön siirryttäessä pidettiinkin tärkeänä sitä, että matematiikka liitetään oppilaiden omiin arkikokemuksiin sekä aiempiin tietoihin matematiikasta. Lisäksi Teemu toi esille myös sen, että oppilaiden orientoitumista uuteen aiheeseen tukee se, että oppilaille tehdään selväksi, mitä on tarkoitus oppia. Kahdessa haastattelussa uuteen aiheeseen orientoitumista ei tuotu ollenkaan esille.

> ”Et siin tulee sellane, et tosiaan yhdessä pohdiskellaan ja sillon ehkä sellast niinku arkipäivän kannalt relevantit ongelmat, joissa se konteksti on niinku lapselle jollain tavalla tuttu, nii se voi auttaa siinä.” (Maria)

> ”No sit jos liittyy johonki niinku aikasempaan opittuun, ni ennen ku lähetään opiskelemaan sitä uutta käsitettä tai uutta asiaa, niin liitetään sitä, niinku tosi monesti matematiikas tulee, että joku alue sit jatkuu seuraavaan, ni siin on niinku selkee jatkumo.” (Teemu)

> ”Et niinku oppilaalle tulee jo niinku ennen kun hän lähtee oppimaan yhtään uutta asiaa ni jonkinlainen käsitys siitä, et mitä sillä jaksolla ollaan lähössä tekemään.” (Teemu)

5.1.2 Konkreettinen vaihe

Opetus-oppimisprosessin toinen vaihe muodostuu konkreettisesta toiminnasta. Kaikki haastateltavat pitivät konkreettista toimintaa, kuten välineiden käyttöä ja piirtämistä, oppilaiden matemaattisen ymmärryksen tukemisen ja kehittymisen kannalta tärkeänä. Lisäksi haastateltavat painottivat sitä, että välineet eivät välttämättä itsessään tuota ymmärrystä, vaan sillä, miten niitä käytetään, on väliä.

Konkreettisuus tukee ymmärrystä. Konkreettista toimintaa pidettiin ymmärryksen kehittymisen kannalta olennaisena, koska opetuksen ja opiskelun on lähdettävä oppilaan omalta ajattelun tasolta. Maria toi erityisesti esille, sen että matemaattinen ymmärrys kehittyy konkreettisesta abstraktiin ja että vasta kun matemaattinen idea on siirtynyt mentaalille tasolle, on matemaattinen toiminta mahdollista ilman konkreettisia apuvälineitä.

> ”Tavallaa, et ku ajattelu kehittyy niinku konkreettisesta sellaseen abstraktimpaan, niin samalla tavalla sitte se matemaattinen ymmärrys kehittyy semmosesta niinku konkreettisesta lukumäärän ymmärtämisestä siihen, että voidaan niinku abstraktimpia kokonaisuuksia pyörittää sitte mielessä, ilman välttämättä enää linkkiä siihen niinku konkreettisiin asioihin ja välineisiin.” (Maria)

Konkreettinen toiminta korostuikin erityisesti uusia asioita opeteltaessa. Konkreettisten välineiden avulla ajateltiin olevan mahdollista tuoda matemaattiset käsitteet ja ideat oppilaiden omalle ajattelun tasolle, mikä ei pelkästään symboliesitysten avulla olisi välttämättä mahdollista. Näin konkreettisia välineitä ja esimerkkejä pidetiin suorastaan välttämättöminä oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymisen kannalta.

> ”Ne rakentuu yleensä ensin konkreettisesta tekemisestä, eli jos harjotellaan jotain uutta asiaa, ni sit harjotellaan konkreettisil välineillä.” (Sanni)

> ”Tämmöset, nii ne niiden vahvuutena ainaki on just se ymmärtämiseen niinku tähtääminen, et ku pystyy itse tekemään niillä välineillä, niin se niinku on lähempänä sitä omaa ajatusmaailmaa ja kehitystä, kun se, että laittaa vaan lukuja peräkkäin tai yhteen- tai vähennyslaskuja eri laskutoimituksia peräkkäin.” (Jenni)

> ”Mut et sit ehkä just niitä materiaaleja, että et millä nyt vois niinku yrittää sen pääasian siitä saada, et ihan turha ruveta laskemaan niit pinta-aloja, jos ne ne lapsiraukat ei tiiä, et mistä siin on siinä, miten ees yritetään laskee.” (Tuula)

Haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että oppilaat saavat oivaltaa matemaattisia ideoita ja rakentaa ymmärrystään niistä itse, eivätkä vain vastaanota ideoita valmiina opettajalta tai oppikirjasta. Tällaisessa oppilaan omassa oivaltamisessa konkreettisia välineitä pidettiin tärkeänä työkaluna.

> ”Ja näin et ihan oikeesti kokeillaan, et tosiaan se on näin. Eikä se pelkästään tästä, et toi kirjan tietolaatikko sanoo, että se on näin.” (Maria)

> ”Ja sellasta toistamista, missä lapsi tekee paljon itse ja välineillä, ja pääsis oivaltamaan itse, et mitä siin tapahtuu.” (Sanni)

Lisäksi osa haastateltavista nosti esille sen, että konkreettisten välineiden avulla oppilaat saavat matematiikasta konkreettisia havaintoja, joista oppilaille jää konkreettisia mielikuvia matematiikan käsitteistä ja ideoista. Nämä mielikuvat voivat edelleen tukea työskentelyä abstraktimmalla tasolla, vaikka välineet eivät olisikaan saatavilla.

> ”Mut ku saa jonku jutun käteen tai ne murtolukupalikat käteen, et okei no ne oli ne keltaset palikat, nehän on ne kolmasosapalikat ja ainiin niitä oli kolme, että saadaan kokonainen. Niin tavallaan voidaan aina palata siihen, vaikkei se oliskaan just sillä hetkellä kädessä niin, et ainii muistaksä?” (Tuula)

Konkreettisten välineiden käyttöä pidettiin siis merkittävänä osana oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymisen tukemista.

Pedagogisia huomioita välineiden käyttöön. Vaikka konkreettisia välineitä pidettiin tärkeänä matemaattisen ymmärryksen kehittymisen kannalta, ei välineiden käyttö välttämättä automaattisesti takaa ymmärrystä. Haastateltavat toivat esille monia huomioita siitä, mitkä asiat vaikuttavat välineiden hyödyllisyyteen matemaattisen ymmärryksen tukemisessa.

Monet haastateltavista kiinnittivät huomiota välineiden monipuolisuuteen, mutta käsitykset siitä vaihtelivat. Osa haastateltavista piti tärkeänä sitä, että oppilaat saavat käyttää monipuolisesti erilaisia välineitä, jotta he eivät ehdollistu tiettyyn välineeseen. Toiset taas korostivat sitä, että tuttujen välineiden käyttö on tehokkaampaa, koska oppilaat osaavat käyttää niitä. Tällöin samaa välinettä saatettiin käyttää eri matemaattisten ideoiden harjoitteluun. Joka tapauksessa luokanopettajat pitivät tärkeänä sitä, että oppilaat saavat tutustua välineeseen kunnolla. Tällöin välineitä on helppo käyttää apuna myös oppikirjan tehtäviä tehdessä.

> ”Oppilaat vähä ehdollistuu monesti, että ajattelee, et oli se tietynmerkkinen helmitaulu, Tevellan tuote, ni millään muulla ei voi laskea.” (Marko)

> ”Mut että sittenhän niitä [kymmenjärjestelmävälineitä] voi käyttää kaikenlaiseen hajottamiseen ja kokoamiseen ja peruslaskutoimitust.. Niillä voi tehdä ihan mitä vaan. Oikeestaan niinku mihin tahansa matematiikan osa-alueeseen liittyen.” (Maria)

> ”Mut sit on kaikkii näit satataului ja niinku tämmösii, niin mul ei oo niit ollu, koskaa. Sit taas se ku on montaa eri juttuu, ni sit mä oon miettiny sitä, et palveleeks se välttämät tarkotusta.” (Sanni)

> ”Ja sit ku ne on oppinu käyttää tätä, ni sit ne pystyy tätä käyttämään samalla, ku ne itse laskee matikan kirjaa, et ota tää, ota välineet ja laske kirjan kanssa. Siis kun ne on oppinu tätä käyttää.” (Sanni)

Toisaalta Sanni toi esille, ettei välttämättä ole väliä, mitä välineitä käyttää, vaan tärkeintä on, että oppilailla on välineitä käytössä. Kaksi haastateltavista toi esille myös matematiikan oppimisen moniaistikanavaisen tukemisen, mikä on mahdollista, kun oppilaat saavat käsin operoida välineillä.

> ”Mä en tiedä onks sil itse materiaalilla, et onks sil välii, et mikä materiaali se on. Onks sil niinku lapsen näkökulmast merkitystä, et onks ne nappuloita vai palloi vai nappei. Mä en niinku tiedä, et onks sillä nyt varsinaisesti merkitystä, kunhan on niinku välineet, millä voi laskee.” (Sanni)

”No kyllä mä sanoisin, et sellanen ihan niinku keskeinen asia on sellanen niinku visualisointi tai sitte välineiden käyttö niin, että voi ihan niinku tavallaan moniaistikanavaisesti niinku sitä ymmärrystä tukea… Että ei pelkästään niinku, että katsotaan ku joku näyttää ja piirtää tai jotai kirjottaa, vaan et saa itse ottaa käteen ja kokeilla ja laittaa ja ihan niinku..” (Maria)

Osa opettajista ajatteli, että välineet ovat hyvä tuki erityisesti niillä oppilailla, joiden matemaattiset taidot ovat heikompia. Taitavampien oppilaiden ajateltiin selviävän vähemmällä välineiden käytöllä. Lisäksi Jenni kertoi, että hänen opetuksessaan välineiden käyttö oli runsaampaa alkuopetuksessa, minkä jälkeen välineitä on käytetty vähemmän.

”Et esimerkiks, jos on allekkainlaskuja tai jotain isoja lukuja, et siin ois kuitenki jotenki olemas niitä palikoita tai jotain satalaattoja tai jotain vastaavii siin lähel et semmone heikompi laskija, jos se ei ihan oikee pääse niinku se voi ainaki laskee siitä.” (Marko)

”Mutta tuota, mut et niiden kans, ketkä tarvii, niitä ollaan käytetty.”(Tuula)

”Ja sitten no kolmos-nelosella ei oo ehkä niin paljon, tai ei ole ollut niin paljon välineitä, ei voi ei tarvi sanoo, et ei ehkä oo ollu, vaan en oo niin paljon käyttäny välineitä, mut niitäki on ollu.” (Jenni)

Marko ja Tuula mainitsivat käyttävänsä opetuksessa myös digitaalisia versioita välineistä. Marko kertoi käyttävänsä digitaalisia kymmenjärjestelmävälineitä ja Tuula digitaalisia murtolukuvälineitä. Digitaalisten versioiden etuna nähtiin se, että niitä riittää varmasti kaikille oppilaille toisin kuin konkreettisia välineitä. Lisäksi digitaalisia välineitä on helppo käyttää myös kotona. Molemmat opettajat ajattelivat digitaalisten välineiden käyttämisen olevan konkreettisten välineiden käyttöä sujuvampaa, koska konkreettiset välineet ovat irrallisia. Tuula kuitenkin huomautti, että murtolukujen piirtäminen käsin voi olla kätevämpää kuin digimateriaalin käyttö.

”Aikasemmin mä käytin niitä konkreettisia välineitä, et oppilaat laski vaikka pöydällä palikoilla tai rahoilla, mut nyt digitekniikassa ni me ollaan päästy siihen, että ne avaa pädin tai kännykän ja siel on ikäänku ne samat, ja näppärämmin vielä, ku monesti opettajil ei riitä, että vaikka tuhat-palikoita olis sitte kahtakyt kahdellekymmenelleviidelle oppilaalle antaa niit kymmenkappaleit. … Ni siihen kännykkään, sielt saa otettuu vaan reunasta koko ajan vaik kuinka paljon niit, ne ei niinku lopu ollenkaan. Eli mä oon niinku pikkuhiljaa nyt semmoseen siirtymässä.” (Marko)

”No ainaki niissä, mitä nyt nyt tuota niin käytettiin ne murtolukujutut, ni se oli.. Sen hyvä puoli oli se, että se oli niinku paljon nopeempi mun mielestä ku ne palikat.” (Tuula)

”Ja sitä pystyy on silleen niinku hyvä se digijuttu, että ku sen voi viedä kotiin. Eli semmonen, joka tarvii kotona siihen laskuvälineen.” (Marko)

> ”Nii niitä appeja käyttäny, ni tavallaan siinä on paljon hitaampaa se, kun jos mä piirrän taululle, ni se on nopeesti tehty ja sen ei tarvi olla nii tarkka, mut että ku niihin ei pysty oikeen niihin ei pysty kirjottamaan.” (Tuula)

Konkreettisissa välineissä nähtiin kuitenkin myös heikkouksia. Kuten edellä tuli jo ilmi, konkreettisia välineitä ei välttämättä ole niin paljon, että niitä riittäisi tarpeeksi jokaiselle oppilaalle. Lisäksi välineiden käytön mainittiin vievän paljon aikaa oppitunnista. Moni opettajista mainitsi myös, että välineet saattavat viedä oppilaiden huomion vääriin asioihin tai jopa sekoittaa oppilaiden ajattelua. Sanni totesi kuitenkin, ettei hänellä ole kokemuksia siitä, että välineiden käyttö olisi ollut huono ratkaisu.

> ”Sit jotkut multilinkit on kivoja, mut helposti niis käy sillee, niinku oikeesti käy oppilailla, et niil on kiva leikkiä, mut ei tuu laskettua, et pojat tekee niist pyssyjä ja tytöt tekee niist hevosia.” (Marko)

> ”Et monesti se niinku se ongelma on, et se käytettävyys on nii huono niis monissa, että oppilaat menee sen takii sekasin.” (Marko)

> ”No, no emmä oikeestaa muuta ku että et jotkut niistä vie vähän aikaa just niinku ne palikatki ja se mielenkiinto voi sit hajaantua siihen, varsinki aluks.” (Tuula)

> ”Emmä ei oo tullu mitää semmost vastaan, et no tää oli kyl virhe, et ei ehkä kannata niinku näitä… Nyt sit käyttää.” (Sanni)

Kaiken kaikkiaan konkreettisten välineiden ajateltiin olevan tärkeä osa matematiikan opetusta ja oppimista. Kaikki paitsi yksi haastateltavista kertoivat käyttävänsä opetuksessa paljon konkreettisia välineitä. Välineiden heikkoudet liittyivät usein niiden käytännöllisyyteen, eikä niinkään matematiikan oppimiseen, vaikka niiden kerrottiinkin myös voivan sekoittaa oppilaan ajattelua. Konkreettisten välineiden käytännöllisyyden ongelmaan ehdotettiin ratkaisuksi digitaalisten versioiden käyttöä.

Piirtäminen ymmärryksen tukena. Konkreettisten välineiden lisäksi haastateltavat kertoivat käyttävänsä myös piirtämistä oppilaiden matemaattisen ajattelun konkreettisen vaiheen tukemisen keinona. Piirtämistä käytettiin apuna opetustuokioissa, kun tarkoituksena oli rakentaa ymmärrystä jostakin matemaattisesta ideasta tai matematiikan tehtävästä yhdessä. Tällöin opettaja saattoi piirtää käsitteestä tai tehtävästä havainnollistavia kuvia taululle tai dokumenttikameralle.

”No sitte piirtämistä mä käytän aika paljon sekä niin, että mä ite piirrän noita vaikka sanallisia tehtäviä, niin piirretään auki niitä, että mitä tässä nyt oikeen niinku kysytään ja myös niitä lapsia kannustan piirtämään.” (Tuula)

”Tää nii dokumenttikameralta niinku yhessä, että piirretään siihen ja lapsetki voi piirtää ja mäki voin piirtää. Ja myös niitä välineitä niinku katotaan siinä yhessä. Ja tavallaan rakennetaan sitä, et mistä täs on kysymys. Ni ensin yhessä.” (Tuula)

Haastateltavat kertoivat kannustavansa oppilaita piirtämään myös itse, kuten edellä tulikin jo ilmi. Piirtämisen ajateltiin tukevan oppilaiden ajattelua esimerkiksi tehtäviä tehdessä. Piirtämällä matematiikan tehtävien tilanteita oppilaiden ajateltiin pääsevän paremmin kiinni tehtävän ideaan. Jenni korosti piirtämismahdollisuuden tärkeyttä varsinkin sanallisissa tehtävissä. Marko taas toi esille, että on kiinnitettävä huomiota siihen, että oppilaiden huomio ei keskity piirustusten laatuun, vaan yksinkertaiset kuvat riittävät hyvin.

”Sitten piirretään useesti, et jos jonku tehtävän piirtää esimerkiks, ni oppilaat saa kiinni siitä paremmin, et jos ajattelee näitä vaiheita ni on niinku siis konkreettinen vaihe ja piirtäminen, ni oon voinu sillee tukee oppilast, et jos sil on niinku hankaluuksia, et ei nii että mä piirrän sen, vaan mä auttasin niinku oppilasta piirtämään.” (Marko)

”… tai jos on sanallinen tehtävä, ni mun mielestä on aivan ehdotonta, et siin on tilaa piirtää kuva, koska sit se myös se piirtäminen niinku auttaa sitä ymmärtämistä. Et mitä nyt ees kysytään.” (Jenni)

”Esimerkiks jos on vaikka jotain lasketaan, et kuinka paljon.. Kuinka monta hevosta oli jossain, sit mä oon: mitä täs vois piirtää, ja jos mä huomaan, et oppilas rupee piirtää hevostöitä, ni sit mä niinku, et voisko näit hevosia jotenki symbolisoida siis niinku, et riittääkö pisteet vaan esimerkiks. Et se pääsis tavallaan niinku nopeuttamaan sitä sitä reittiä.” (Marko)

Konkreettiset välineet ja piirtäminen nähtiin tärkeänä osana oppilaiden matemaattisen ymmärryksen tukemista, koska ilman konkreettisia esimerkkejä tehtävistä ja matemaattisista ideoista oppilaat eivät välttämättä ymmärrä, mistä on kyse. Sekä konkreettisia välineitä että piirtämistä käytettiin tukena niin opetustuokioissa kuin oppilaiden itsenäisessä työskentelyssäkin. Sanni piti konkreettisilla välineillä työskentelyä niin tärkeänä, että se meni kirjan tehtävien tekemisen edelle silloin, kun vaikutti, ettei asiaa ole ymmärretty vielä konkreettisella tasolla. Tämä voi johtua siitä, että hän opetti alkuopetuksessa, jossa konkreettinen toiminta on usein isommassa roolissa kuin myöhemmillä luokilla. Teemu taas ei kuvaillut konkreettisten välineiden avulla opettamista tai opiskelua kertaakaan, vaikka mainitsikin konkreettiset välineet ymmärryksen tukemisen keinona. Hän opetti kuudetta luokkaa, mikä voi vaikuttaa konkreettisten välineiden vähäiseen käyttöön opetuksessa.

5.1.3 Harjoitteluvaihe

Kun uuteen aiheeseen on tutustuttu ja orientoitumisen ja konkreettisen toiminnan avulla, sitä harjoitellaan. Kaikki opettajista toivat esille proseduraalisen harjoittelun tärkeyden matematiikan oppimisessa. Matematiikan oppikirjaa ja digimateriaaleja pidettiin hyvinä alustoina matematiikan harjoitteluun. Osa opettajista kiinnitti erityistä huomiota myös matematiikan kotitehtäviin. Matematiikan harjoittelussa pidettiin tärkeänä sitä, että oppilaat saavat tarpeeksi toistoja matemaattisen käsitteen tai proseduurin käytöstä ja että harjoittelu on strukturoitua. Lisäksi haastateltavat toivat esille pedagogisia ratkaisuja, joilla he pyrkivät tukemaan oppilaiden harjoittelua.

Oppikirjat. Kaikki haastateltavista kertoivat käyttävänsä matematiikan opetuksessa matematiikan oppikirjoja. Osalla haastateltavista oppikirjat vaikuttivat olevan suuremmassa roolissa kuin toisilla. Kuitenkin kaikki haastateltavat korostivat sitä, että oppikirjan tehtävien tekoon voidaan siirtyä vasta sitten, kun oppilaat ovat esimerkiksi konkreettisten välineiden tai yhteisen opetuskeskustelun seurauksena ymmärtäneet, mistä oppitunnin aiheessa on kyse. Oppikirja nähtiinkin ennen kaikkea harjoittelualustana, joka tukee muuta toimintaa matematiikan opetuksessa. Lisäksi monet haastateltavista painottivat sitä, ettei oppikirjan tekeminen saa olla suorituskeskeistä. Tällä tarkoitettiin, että on tärkeämpää harjoitella omassa tahdissa kuin keskittyä siihen, kuka ehtii ratkoa eniten tehtäviä.

> ”Kyl mä nään sen enemmän sen kirjan niinku sen tota muun toiminnan niinku tukemisena. Ja sen muun toiminnan jatkona. Et se sitä kirjaa tehään sit sen jälkeen, kun on niinkun yritetty ensin se asia ymmärtää.” (Sanni)

> ”Ja sitte ku musta näyttää, että se on niinku suurimmalla osalla selvä se hommeli, nii sitte he niinku rupee tekemään niitä tehtäviä.” (Tuula)

> ”Mut et mut ehkä siinäki sit pitäis niinku luokassa luoda sitä niinkun mielikuvaa siitä ja niinku sanallistaa sitä, et se kirja nyt on vaan.. Tai siis kirjallaki on tärkee merkitys, mutta se ei oo merkittävää, et kuka siel pääsee ja mille sivulle.” (Sanni)

Marko piti kuitenkin tärkeänä sitä, että kaikki oppilaat ehtivät tehdä kirjasta ainakin kappaleen ensimmäisen aukeaman, jotta he ehtivät varmasti harjoitella kaikkia eri versioita. Näin ollen haastateltavien välillä oli ristiriitaisia käsityksiä oppikirjan tekemisen suorituskeskeisyydestä.

> ”et ikäänku on tavotteena, et jokainen oppilas ehtii laskee sen ekan aukeeman, et siin tulee harjoteltuu ne kaikki versiot, mitä on et ihan perusversio ja erilaisii sovelluksii ja vähän niinku vähän twistiiki, et joutuu tulee toistepäi.” (Marko)

Osa haastateltavista ajatteli, että myös oppikirja voi tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Teemu toi esille sen, että nykyään oppikirjoissa on usein havainnollistettu matemaattisten ideoiden ja käsitteiden välisiä yhteyksiä, mikä voi tukea oppilaan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Myös oppikirjojen kuvallinen tuki nähtiin tärkeänä oppilaiden ymmärryksen kehittymisen suhteen, koska sen avulla oppilaat, jotka eivät ole vielä siirtyneet matemaattisen ajattelun abstraktimmalle tasolle, saattoivat ymmärtää tehtäviä paremmin.

> ”No niis oppikirjois on tietysti niinku nykyään paljon paremmin myös sitä öö sekä tuotu esiin niitä mmm matemaattisia esimerkiks kaavoja ja mikä vaikuttaa mihin, elikkä, jos niinku oppilaita ohjaa niiden sen tiedon äärelle, niin kylhän siel on nykyään aika hyvin havainnollistettu myös niit asioita.” (Teemu)

> ”Mielellään, et et vois aina kirjoissa, ku kirja ei voi olla siin niinku live täl hetkellä vieläkään ihan kokonaan, ni et siin ois kuvatukea niin, et se ois helposti käytettävissä. Et esimerkiks, jos on allekkainlaskuja tai jotain isoja lukuja, et siin ois kuitenki jotenki olemas niitä palikoita tai jotain sata-laattoja tai jotain vastaavii siin lähel et semmone heikompi laskija, jos se ei ihan oikee pääse niinku se voi ainaki laskee siitä.” (Marko)

Osa luokanopettajista piti erityisesti oppikirjojen ongelmanratkaisutehtäviä oppilaiden ymmärryksen kehittymisen kannalta tärkeinä, koska niissä oppilaat joutuvat soveltamaan matematiikan tietojaan. Toisaalta Maria piti tärkeänä, että oppikirjan tehtävät ovat mahdollisimman selkeitä ja yksinkertaisia, koska silloin tehtävät ohjaavat paremmin oppilaan matemaattista toimintaa. Marko toi esille myös alaspäin eriytetyt matematiikan oppikirjat, jotka voivat tukea varsinkin heikompien oppilaiden ymmärrystä tehtäviä tehdessä.

> ”Ööö no nyt tällä hetkellä opettamista [oppikirjoista], ni joo ne pulmatehtävät on hyviä.” (Jenni)

> ”… ni mitä paremmin se kirja vaikka ohjaa sitä lasta toimimaan, mitä selkeempiä ja yksinkertasempia ja yksiselitteisempiä ne tehtävät on, sitä paremmin kaikki toimii.” (Maria)

> ”Ku meil on taas siis sillee, ku meil on niin sanotusti tuolla SanomaProlla se on “Oma”-nimellä menee se heikompien kirja tavallaan. Et meil on niinku lähes jokaseen sit löytyy niinku se kuvatuki, et ku on allekkain kertolaskuu, nii muil on ehkä ekassa se löytyy ne kuvatuet vielä, mut sit loput pitäs mennä jo niinku pelkkinä algoritmeinä.” (Marko)

Oppikirjoissa nähtiin kuitenkin myös heikkouksia. Jokainen haastateltavista toi esille sen, että oppikirjojen tehtävät ovat mekaanisia eivätkä siksi takaa oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Siksi konkreettisia välineitä ja matematiikan puhumista korostettiinkin ymmärryksen tukemisen keinona. Luokanopettajat toivat esille myös sen, että oppilaat voivat osata ratkaista oppikirjan tehtäviä oikein ymmärtämättä, mitä he ovat tekemässä ja miksi. Tämän vuoksi oppikirjan tehtävistä selviytymistä ei voidakaan pitää suoraan merkkinä asian ymmärtämisestä. Maria toi esille myös sen, että joskus oppikirjoissa "oiotaan" asioita, jolloin asiat, joiden ymmärtäminen on tärkeää, esitetäänkin mekaanisen toiminnon avulla suoritettavina.

> ”Eli ei pelkästään paperi-kynälaskemista ja sitten ajatellaan, että jossain vaiheessa se lapsi niinku ymmärtää, että kun sä meet kymmenen yli, niin mitä tapahtuu ja niin edespäin, vaan välineillä uudestaan, uudestaan, uudestaan.” (Sanni)

> ”Mut siin on aina se vaara, et se [oppikirjojen tekeminen] lipsahtaa sellaseen niinku mekaaniseen toistamiseen, että sitte tehdään eikä ymmärretä, mitä tehdään ja miksi.” (Maria)

> ”Et se että niinku kirjan valmistehtävät ja muut ja varsinki, jos ne on niinku hyvinki mekaanisia, ni ei kerro sen ajattelun kehityksest paljon mitään.” (Teemu)

> ”Ja se välttämättä ei tarkota sitä, et sä oisit ymmärtäny, vaan se et se lapsi vaan huomaa, et okei, et tässä otetaan noi luvut ja niistä tehään kertolasku, koska tää on kertolaskusivu.” (Tuula)

> ”Niinku klassisena esimerkkinä tällee, et “jos kerrot kymmenellä, niin siirrä pilkkua yksi askel jonnekki suuntaa”. Tavallaa niinku millon niinku nollataan se koko niinku kymmenjärjestelmän ymmärrys. Että se kirjan ohje niinku saattaa tuoda siitä toiminnasta tosi sellast mekaanist.” (Maria)

Haastateltavat olivat siis yhtä mieltä siitä, että oppikirjassa painottuu usein mekaaninen matematiikka. Lisäksi haastateltavat toivat esille muita oppikirjojen heikkouksia, jotka eivät kuitenkaan tulleet esille kaikissa haastatteluissa. Jenni harmitteli sitä, ettei matematiikan oppikirjoissa ole tarpeeksi avoimia tehtäviä, joissa olisi useampi kuin yksi oikea vastaus, ja totesi myös, että oppikirjoissa tulisi olla enemmän tilaa tehtävien piirtämiselle. Sanni toi esille sen, että oppikirjasarjojen välillä on eroja matematiikan konkreettisen havainnollistamisen suhteen. Teemu taas kertoi, että jotkut oppikirjojen ratkaisut voivat ennemmin sotkea oppilaan matemaattista ajattelua kuin tukea ymmärrystä, vaikka oppikirja olisikin muuten hyvä.

> ” Ja sitte että monesti oppikirjoissa on tehtäviä, jois on vaan yksi vastausvaihtoehto ja muut on niinku vääriä. Et mä kaipaisin ehkä oppikirjoihin enemmän tehtäviä, joissa on niinku useita eri ratkaisuja.” (Jenni)

> ”Nii sitte kaikissa oppikirjoissa ei sanallisissa todellakaan oo sitä tilaa piirtää, mikä ois sitte se hyvä juttu.” (Jenni)

> ”Onhan sitä vaikee saada sitä konkretiaa niinku painetulle sivulle ja painetulle kirjalle, mut jotkut oppikirjat onnistuu siin paremmin ja jotkut sit niinku vähä huonommin.” (Sanni)

> ”No jos opettaja on hyvinki kokematon, eikä niinku itse johdonmukasesti ymmärrä sitä, mitä on tekemässä, ni onhan nykysissäki oppikirjoissa vaikkapa juuri nytki käytössä olevassa sarjassa, mikä on muuten aivan erinomanen, niin siel on niinku sen tyyppisiä sisältöjä, jotka ei välttämättä tue sen matemaattisen ymmärryksen kehittymistä, vaan saattaa sotkea sitä.” (Teemu)

Kaikki haastateltavat olivat siis sitä mieltä, että oppikirja ei itsessään välttämättä tue oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. He pitivät kuitenkin proseduraalista harjoittelua tärkeänä matematiikan opetuksen ja oppimisen osana, ja ajattelivat oppikirjan tarjoavan siihen hyviä tehtäviä.

> ”Ja sit me tiedetään kuitenki, et myös sellane mekaaninen harjottelu on sellast, mitä tarvitaan.” (Maria)

> ”Et.. sitä kirjaa voi myös käyttää ihan sillä tavalla, et sit antaa sen lapsen oikeesti laskee, jollon ne asiat, jotka näyttää ainaki mulle, et ne ois niinku jo automatisoitunu sen lapsen mielessä, ni antaa sen harjotella sit sen kirjan..” (Sanni)

Digimateriaalit. Kaikki haastateltavat mainitsivat myös digimateriaalit matematiikan opetuksen välineenä. Erityisesti digimateriaaleja käytettiin harjoittelussa, mutta osa opettajista mainitsi ne myös opetustuokioiden yhteydessä. Maria kertoi käyttävänsä paljon tutkimuspohjaisia digimateriaaleja, kuten Villeä ja Ekapeli matematiikkaa, joiden hän ajatteli voivan tukea myös oppilaiden matemaattista ymmärrystä. Näiden materiaalien hyvänä puolena hän piti sitä, että opettaja voi itse valita sopivat tehtävät oppilaille, jolloin oppilaat pääsevät operoimaan matematiikkaa oman ajattelun tasonsa mukaisesti. Digimateriaalin heikkoudeksi hän mainitsi sen, että oppilaan tehdessä itsenäisesti digitehtäviä ei synny keskustelua matematiikasta.

> ”No no sitten just se ehkä noi niinku sähköset sovellukset. Että toi Ville on musta ihan tosi hyvä materiaali. Ja sitte Ekapeli matikka. Et ne on sellaset, mitä on nyt niinku eniten käyttäny kirjan ulkopuolelta.” (Maria)

> ”Mut sit siin on se ongelma, että ööö. Se, mikä siitä jää puuttumaan, on nimenomaan se dialogi sen aiheen tiimoilta ja sitte se opettajan rooli voi typistyy niinku tosi pieneen, koska se sovellus on niin hyvä, et se ohjaa ikään ku sitä lasta toimimaan.” (Maria)

Digimateriaaleja pidettiin myös proseduraalisen harjoittelun kannalta hyvänä alustana, mutta siihen palaan myöhemmin kohdassa *toistot*.

Kotitehtävät. Matematiikan taitojen harjoittelussa tuotiin esille myös kotitehtävien merkitys, sillä harjoittelun jatkaminen kotona nähtiin tärkeänä. Erityisesti Teemu korosti sitä, että kotitehtävät tulee antaa oppilaille yksilöllisesti, jotta ne parhaalla mahdollisella tavalla tukevat jokaisen oppilaan oppimista.

> ”Elikkä se liittyy siihen suunnitteluprosessiin, elikkä sit siel suunnittelussa pitää kans kattoo, et et onko se vaikkapa mitä niinku oppikirjan tekijä on ajatellu läksyks, ni onks se järkevä läksy. Vahvistaako se sitä tunnilla opittua? Onks siitä mitää hyötyä?” (Teemu)

> ”Ja sit myös oppilaiden läksyjä pitää yksilöllistää. Eli jotkut, jotka ei oo saanu vaikka siin tunnin aikana mekaanisist tehtävist edettyä sinne niinkun öö soveltaviin tehtäviin, ni on paljon järkevämpää antaa niitä läksyks kuin kertaavia mekaanisia tehtäviä. Ja sit taas jotkut, jotka on tosi päteviä ja eteviä ja muuta, ni niille pitää keksii jotain ihan omanlaista läksyä, jotta se niinku motivois niitä tekemään ne läksyt.” (Teemu)

Puolet opettajista toivat oppikirjan hyötynä esille myös sen, että siitä on helppoa antaa kotitehtäviä.

> ”Et ainaki tossa Millissä nyt on tosi helppo antaa niinku kotitehtäviä.” (Jenni)

> ”Mut se on niinku sen siin siis onhan matikan kirjast helppo antaa esimerkiks kotiläksyt.” (Sanni)

Toistot. Neljä haastateltavista korosti toistojen tärkeyttä matematiikan harjoittelussa, koska ne tukevat matemaattisten operaatioiden automatisoitumista, mikä nähtiin ymmärryksen kannalta hyödyllisenä. Maria piti tärkeänä sitä, että toistoihin käytetään monipuolisia materiaaleja, jotta oppilaiden motivaatio tekemiseen säilyy. Toistoja tehtiinkin niin ”drillaavien” tehtävien, konkreettisten välineiden, matematiikkapelien kuin digimateriaalienkin avulla.

> ”Ni siis jos sä haluut niinku, jos mietitään ihan semmosii konkreettisia tapoja, et miten niit asioit opitaan, niin toistoja. Ihan älytön määrä toistoja.” (Sanni)

> ”Jaa ja välillä he ymmärtää ja välillä ei sit vielä sillä kertaa ja sitte kertaillaan aina uudestaan. Ehkä semmosta niinku toistoa ja rutiinia, et okei mites meiän tässä pitikään tehä ja sitte mietitään sitä.” (Tuula)

> ”Niin siihen kannattaa aika paljon käyttää sittte niinku mielikuvitusta, että millä eri tavoilla tehdään sitä sellasta toistavaa harjottelua.” (Maria)

> ”Ja sit ehkä digimatsku on mun mielestä hyvä ainaki drillausta.” (Jenni)

Struktuuri. Tuula ja Maria toivat vahvasti esille struktuurin tärkeyttä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Struktuurilla tarkoitettiin sitä, että matematiikan harjoittelu tapahtui usein tutussa ympäristössä, jossa ei ole liikaa uusia ärsykkeitä. Ajatuksena oli, että oppilaiden on helpompaa keskittyä itse matematiikkaan sen sijaan, että oppilaiden tarvitsisi ihmetellä, mitä on tarkoitus tehdä. Struktuurin ajateltiin myös tukevan oppilaan toiminnan ohjausta. Nämä kaksi haastateltavaa kokivat matematiikan oppikirjan tarjoavan hyvän struktuurin matematiikan harjoittelemiselle.

> ”No ehkä siinä, että tavallaan se, monille lapsille ne rutiinit on tärkeitä. Että ei kulu aikaa siihen, että mitä ihmettä tänään tehdään. Vaan et me tiedetään, et nyt meil on matikka ja meil on sitte taas otetaan se kirja ja tehään taas niitä tehtäviä. Jollon sitä ikään ku aivojen kapasiteettia enempi sen itse tehtävän tekemiseen, kun ei tarvi ajatella sitä, että mitä täytyy tehdä ja missä mä oon ja mihin mun täytyy mennä. … Niin, et on niinku semmone rauhallinen olo, et näin näitä tehään.” (Tuula)

> ”Sehän siinä niinku selkeesti on, että sen itse asian ymmärtämisessä niinku ei kulu energiaa siihen sellaseen hämmennykseen, et tulee joku erilainen tehtävä. Koska sit se on yllättävän tärkeetä monille lapsille se niinku rutiini. Et aina alotetaan tuolta reunasta, et se se kirja voi tukee niinku sitä toiminnan ohjausta, jos se on mietitty sillee selkeesti ja hyvin.” (Maria)

Pedagogiset ratkaisut. Edellä kuvattujen lisäksi haastateltavat toivat esille muita pedagogisia ratkaisuja, joilla he pyrkivät matematiikan harjoittelun yhteydessä tukemaan oppilaiden ymmärtävää oppimista. Tuula puhui paljon tehtävien jakamisesta osiin, jolloin monivaiheisempikin tehtävä on mahdollista ymmärtää, vaikka tehtävä kokonaisuudessaan tuntuisi haastavalta. Hän toi usein esille myös sen, miten oppilaat saattoivat keskustelun avulla huomata virheitä omissa ratkaisuissaan ja sitten virheen kautta oivaltaa, mistä tehtävässä oikeastaan on kyse. Jenni taas piti tärkeänä sitä, että tehtäviä tehdessä kiinnitetään huomiota siihen, että oikeaan ratkaisuun voi päästä monella eri tavalla ja että tehtäviin ei välttämättä ole aina olemassa vain yhtä oikeaa ratkaisutapaa. Marko käytti virheen kautta oivaltamista apuna myös matematiikan kokeiden yhteydessä. Hän kertoi antavansa oppilaille mahdollisuuden korjata virheellisesti ratkaistuja tehtäviä vielä kokeen palautuksen jälkeen varsinkin alakoulun ylemmillä luokilla.

> ”… siis laskuja tai tehtäviä, missä niinku on monta vaihetta. Nii sitte voidaan miettiä, että et okei, miten tän vois laskee, ja sit voidaan tehä niinku monella monella pikkulaskulla ensin, et okei ensin me yritetään nyt tätä ja sitte nythän me ollaan saatukki vasta selville..” (Tuula)

> ”Ja sit mietitään yhessä, että no mitä siinä, et missä kohtaa se on menny pieleen, ja okei tohon asti niinku vaikuttaa ihan ookoolta, mutta nyt tässä on tapahtunu jotain. Ni sit heitä itteensäki naurattaa se, et no mitä mä oikeen ajattelin? Että että kyllä mä vähän aattelinki, et on se outoo, et täst tuli nyt miljoona vaikka ei pitäny.” (Tuula)

> ”Ja sitten myös pohtimaan niinku oppilaiden kanssa eri vaihtoehtoja, et seki on aika hedelmällistä ja ymmärtämiseen pyrkivää, et huomataan, et ei välttämättä oo aina yhteen tilanteeseen yhtä oikeeta ratkaisua, et ehkä eniten semmosta ymmärrystä kehittää semmoset tehtävät, joihin onki monta eri ratkaisua, ja sit jos ne pystyy selittämään, et miksi tämäki ratkaisu on oikein ni sit ollaan kyllä aika pitkällä ymmärtämisessä.” (Jenni)

> ”Et ku on koe ollu, niin tota mä kyl annan niinku niinku pisteet siitä valmiiks, mut mä en merkkaa, et mikä siin on väärin. Mä vaa merkkaan, et mikä tehtävä on väärin. Jos ne saa selvitettyy, että mikä siin oli virhe ja miten ne korjaa sen ni sit ne voi tulla sen kokeen kans mulle takas ja ne saa vielä puolet siitä menetetyst pisteist takas.” (Marko)

Lisäksi Marko kertoi käyttävänsä opetuksessaan muistia tukevia välineitä, kuten kertotaulutaulukkoja ja esimerkiksi geometrian käsitteisiin liittyviä julisteita. Näiden avulla oppilaiden on helppo palauttaa mieleen tehtävissä tarvittavia tosiasioita, jos hän ei niitä muista ulkoa. Marko piti kuitenkin tärkeänä sitä, että asiat on ensin opiskeltu niin, että oppilas esimerkiksi ymmärtää, mistä kertolaskussa on kyse.

> ”Mut sit mä paljon kyl käytän kans semmosii, että oppilaan niinku muistin tukena esimerkiks semmone kertolaskujen opettelu, ni jos et sä muista kertolaskuu, ni sun pitää nyt sitte, kun sä oot kerran sen käsitteen oppinu, et voi toistaa: “Seitsemän plus seitsemän plus seitsemän plus seitsem..” et sä tiedät, mist on kyse esimerkiks, ni sit sulla kannattaa olla se kertotaulukko, jossain.” (Marko)

Matematiikan harjoittelu nähtiin kaikissa haastatteluissa tärkeänä osana matematiikan oppimista. Osa haastateltavista piti harjoittelua tärkeänä ymmärryksen kehittymisen kannalta, osa näki sen ennemminkin tärkeänä asiana ymmärryksen kehittymisen lisäksi. Yhtä mieltä oltiin kuitenkin siitä, että oppilaille tulisi tarjota monipuolisia keinoja matematiikan harjoitteluun.

5.1.4 Matemaattisen tietoverkoston kehittyminen

Matemaattisen tietoverkoston kehittyminen nähtiin usein matemaattisen ymmärryksen seurauksena, ja se muodosti oman yläluokkansa opetus-oppimisprosessiin liittyvissä tekijöissä. Marko ja Teemu kuvasivat matemaattisen ymmärryksen kehittymistä käsitetiedon kehittymisenä. Matematiikan ymmärtämisessä pidettiin tärkeänä sitä, että oppilas oppii tunnistamaan käsitteen eri osat. Tätä pyrittiin tukemaan esimerkiksi jakamalla käsitteittä osiin. Lisäksi pidettiin tärkeänä, että oppilaat tunnistavat eri käsitteiden välisiä yhteyksiä. Tietoverkoston kehittymistä pidettiin ymmärryksen tuloksena, mutta toisaalta osa haastateltavista toi esille myös sen, että esimerkiksi eri käsitteiden välisiä yhteyksiä tulee tuoda matematiikan opetuksessa esille. Näin ollen voisi ajatella, että osalle opettajista käsiteverkoston kehittyminen näyttäytyi ennemminkin opettajan tarjoamina yhteyksinä kuin oppilaiden itse oivaltamina yhteyksinä.

> ”… käsitteellisen oppiminen, et miten tavallaan niinku ne eri tekijät, mitä jossain käsitteessä on. Jos katot vaikka lukukäsitettä, et miten ne saa niinku yhteen, et on lukumäärä ja numeromerkki ja lukusana esimerkiks.” (Marko)

> ”Ni näitä liitoskohtia kannattaa myös käyttää hyväks, koska ne voi tarjota sit oppilaalle niit siltoja sen uuden asian oppimisen plus myös sit taas sitä siltaa, jolla ne saa yhdistettyä niit asioit toisiinsa.” (Teemu)

> ”No tietysti niinku konkretisoimalla niitä [yhteyksiä] ja myöski sitte esittämällä niitä asioita niin, et niinku rakentaa niitä vaikkapa ihan paperilla oppilaiden kanssa niin, et rakentaa sitä ymmärrystä, et miten se asia liittyy toiseen. Et todistelemalla, et miksi asia on näin.” (Teemu)

Lisäksi haastatteluissa tuotiin esille, että kun matemaattinen käsite on ymmärretty, ei konkreettista tukea enää tarvita. Tästä voisi päätellä, että käsite on ymmärretty, kun se on siirtynyt oppilaan mentaaliseksi malliksi, jolloin sitä on mahdollista käsitellä mielessä.

> ”Mutta tuota, monet ei niitä sitte sen enempää tarvi, ku nää on kuitenki jo vitosella ni et he niinku jotenki hoksaa siitä sitte ite. Et ne vaan hidastaa sitte ne välineet.” (Tuula)

5.1.5 Matematiikan soveltaminen

Neljä haastateltavaa toi esille myös matematiikan soveltamisen, joka nähtiin ennen kaikkea ymmärryksen seurauksena ja se muodosti oman yläluokkansa. Monet haastateltavista pitivät oppilaan kykyä soveltaa matematiikkaa merkkinä siitä, että oppilas on ymmärtänyt asian. Tätä perusteltiin esimerkiksi sillä, että soveltaminen vaatii oppilaalta matemaattisten käsitteiden ja ideoiden välisien yhteyksien tunnistamista.

> ”Et jos on allekkain kertolasku ollu, nii et on se ylempi luku on kolminumeroinen, ni siinä seuraavassa se on nelinumeroinen. Eli se, joka ymmärtää, no näihän tää jatkuu tietysti. Tai

jossain saattaa olla vaikka, no mitä jos siin onki nolla, mitä me nyt tehää? No ihan samalla tavalla.” (Marko)

”Mut et onhan siellä sit niitäki kertausratoja ja semmosia, missä on niitä on sekotettu niitä asioita. Niin sehän sitte niinku kertoo siitä ymmärryksestä.” (Tuula)

”Siinä vaiheessa, ku huomaa, et oppilaat osaa liittää niitä asioit toisiinsa ja soveltaa.” (Teemu)

Toisaalta osa opettajista ajatteli soveltavien tehtävien myös tukevan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Tällaisiksi soveltaviksi tehtäviksi haastateltavat mainitsivat esimerkiksi oppikirjojen pulma- ja päättelytehtävät sekä avoimet tehtävät, joihin on useampi kuin yksi oikea ratkaisu. Marko piti kuitenkin avointen tehtävien heikkoutena sitä, että oppilaiden on hankalaa tarkistaa niitä itse, jos oikeita vastauksia on useita. Teemu mainitsi myös päässälaskut matematiikan soveltamista vaativana tehtävänä.

”Ja et onhan siellä muutamia aina kappaleessa on semmosia niinku päättely- ja pulmatehtäviä. Et ehkä mun mielest tukee parhaiten semmosta niinku ymmärtämistä ja keksimistä…”(Jenni)

”Sitte toinen hankaluus on kyl se, että se ehkä liittyy kyl opettajiin, koska ois kauheen tärkee, et ois avoimii tehtäviä, semmoi että on useita eri vastauksia. … Ni se on opettajalle hankalaa tarkitusttaa semmost. Ku oppilaat kysyy: “Onks tää oikein?”, mut jos vaihtoehtoja on tuhansia oikeita, ni niihin ei voi niinku laittaa mihinkään tarkastukseen. Siel vaa lukee tietenki, että: “Useita oikeita vastauksia”, et se on oppikirjas aina hankala.” (Marko)

”aika usein mun tunneilla sen opetusosion niinku jälkeen ni on vielä päässälaskut, jolla sit vielä tota vähän otetaan semmost soveltavaa, soveltavaa tota matematiikan laskemista siihen” (Teemu)

Teemu ja Jenni pitivät erilaisia matematiikkapelejä hyvänä keinona harjoitella matematiikan soveltamista, koska niissä oppilaat joutuvat yhdistelemään matematiikan eri ideoita, kuten laskutoimituksia. Toisaalta Maria oli kuitenkin sitä mieltä, että matematiikkapelit eivät välttämättä edellytä matematiikan pohdiskelua, vaan perustuvat matalampiin ajattelun tasoihin. Mielipiteet matematiikkapelien hyödyllisyydestä matematiikan soveltamisen suhteen siis vaihtelivat, mutta tämä voi selittyä esimerkiksi sillä, että haastateltavilla saattoi olla kokemuksia keskenään erilaisista peleistä.

”Jaa sitte tottakai kaikki pelilliset tehtävät ja muut, ni ne niinku pistää jo luonnostaan siis soveltamaan sitä matemaattista ajattelua, et niissä sit niinku otetaan niit semmosia taitoja käyntiin ja niitki pitää harjotella. Et jos ei niit taitoja käytetä, niin tota ei niit sit myöskään opi.” (Teemu)

”Tai peleissähän nyt ei oo sinänsä monestikkaan semmosta mekaanista, vaan niissä ehkä täytyy yhdistellä eri laskutoimituksia tai muuta.” (Jenni)

”Nii jos mietitään niinku ajattelun taitojen hierarkiaa, ni helposti sellaset pelilliset sovellukset jää niinku sinne matalan tason ajattelun taitojen… niinkun kategoriaan, että ei tuukkaan sitä sellasta niinku pohdiskelua.” (Maria)

Matematiikan soveltaminen nähtiin siis sekä matemaattisen ymmärryksen tuloksena että matemaattista ymmärrystä tukevana toimintana. Haastateltavien käsitykset siitä, millaiset tehtävät ja harjoitteet ovat soveltavia, olivat kuitenkin jossain määrin ristiriidassa keskenään. Vaikka aiemmin tuli ilmi, että haastateltavat pitivät uusien asioiden liittämistä oppilaiden aiempaan matemaattiseen tietoon tärkeänä, ei kukaan haastateltavista tuonut esille sitä, että näin jo uuden asian oppiminenkin voi olla aiemman tiedon soveltamista uuteen kontekstiin.

5.1.6 Matematiikkapuhe

Kaikki haastateltavat pitivät matematiikasta keskustelemista oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä tukevana toimintana. He pitivät tärkeänä sitä, että oppilaat sanallistavat omaa matemaattista ajatteluaan. Oppilaita kannustettiin matematiikan sanallistamiseen sekä oppilaiden välisessä matematiikkakeskustelussa että opettajan ja oppilaan välisessä keskustelussa. Matematiikkapuheen merkitys tuotiin esille opetus-oppimisprosessin kaikissa vaiheissa.

Matematiikan sanallistaminen. Matematiikkapuheella tarkoitettiin matematiikan sanallistamista, eli sitä että matemaattisia ideoita, kuten laskuja ja algoritmeja, selitetään auki. Haastateltavat pitivät ymmärryksen kehittymisen kannalta tärkeänä sitä, että oppilaat sanoittavat omaa matemaattista ajatteluaan esimerkiksi selittämällä ratkaisujaan ääneen.

”Mä käytän aika paljon semmosia, ennen sanottiin metakognitioita, eli joku oppilas niinku, jos se laskee jonku tehtävän, sit mä kysyn, et miten sä päädyit siihen, mitä sä ajattelet, ku sä lasket sitä.” (Marko)

”[…] ja sitten jotenki se sanallistaminen mun mielestä on tosi niinku tärkeä osa sitä ymmärrystä, että sä osaat avata sen matemaattisen kielen myös niinku verbaaliseen muotoon […]” (Jenni)

Sanallistamista pidettiin tärkeänä myös siksi, että siinä oppilas joutuu perustelemaan omaa ratkaisuaan. Kun oppilas joutuu perustelemaan ratkaisunsa, ei riitä, että hän on saanut tehtävän ratkaistua, vaan hänen on myös kerrottava, miksi päätyi tiettyyn ratkaisuun. Ratkaisun perustelemisen avulla haastateltavat kertoivat myös selvittävänsä, onko oppilas ymmärtänyt asian. Jos oppilas ei osaa sanallisesti perustella ratkaisuaan, ajateltiin ajattelun olevan mekaaniseen laskemiseen eikä ymmärrykseen perustuvaa. Toisaalta sanallistamisen avulla selviää myös se, onko asia ymmärretty oikein.

> ”Jos lapsi ei pysty sanallistamaan, et mitä siin niinku matikas tapahtuu, niin totaa sit se vaikuttaa kyl vähä silt, et lapsi ei oo välttämät ymmärtäny.” (Sanni)

> ”Jaa sit mä yritän saada selville sen sillä tavalla, että se lapsi kertoo, mitä se on tekemässä. Eli sanallistaa sen, mitä niinkun tapahtuu ja miten hän ajattelee asiat, koska sillon jää myös kiinni siitä, jos on niinkun ymmärtäny sen asian jotenki väärin.” (Sanni)

Kaksi haastateltavista toi esille myös kirjallisen sanallistamisen. Kirjallisella sanallistamisella tarkoitettiin sitä, että matemaattinen ajatus pyritään kirjoittamaan luonnollisella kielellä. Sen avulla pyrittiin selvittämään esimerkiksi, onko oppilas ymmärtänyt matemaattisen idean oikein.

> ”Tai sitte vois olla tämmöne, ku on desimaalilukuja. On ollu tällanen. […] “nolla pilkku yhdeksän ja nolla pilkku yksi kaksi, eli kaksitoista”. Ja sit mä kysyn niinku oppilailta, et kirjota pikkusiskolle ohjeet, mistä tietää, kumpi näistä luvuista on suurempi.” (Marko)

Osa haastateltavista huomautti kuitenkin, että matematiikan sanallistaminen voi olla oppilaille hyvinkin haastavaa esimerkiksi siksi, että heidän sanavarastonsa ei riitä matematiikan abstraktien asioiden selittämiseen.

Oppilaiden välinen matematiikkakeskustelu. Oppilaiden matematiikan puhumista pyrittiin lisäämään kannustamalla oppilaita keskustelemaan matematiikasta muiden oppilaiden kanssa. Kaksi haastateltavaa toi esille ryhmätyöskentelyn matematiikan tunneilla. Ryhmätyöskentelyä pidettiin hyödyllisenä, koska siinä oppilaiden on pakko puhua matematiikkaa ääneen, jotta saavat tehtävän ratkaistua yhdessä.

> ”niin käytän tota sellasta ryhmäpohdinta- niinkun työskentelymenetelmää, eli tämmöstä Tuuma-juttua, jossa sit niinkun öö heillä ei oo mitään muuta mm pohdintavälinettä ku se oma keskinäinen pohdinta ja sitten tota avoin vihko” (Teemu)

Haastateltavat kertoivat myös kannustavansa oppilaita tekemään matematiikan tehtäviä yhdessä, jolloin heillä on mahdollisuus keskustella tehtävistä. Lisäksi pidettiin tärkeänä sitä, että oppilaat tarkistavat tehtäviä yhdessä ja esittelevät ratkaisujaan toisilleen. Tällöinkin he joutuvat sanallistamaan ajatteluaan ja toisaalta voivat myös huomata itse virheitä ratkaisuissaan ja usein myös löytää tavan korjata niitä.

> ”Sit ku seuraava valmistuu, mä sanon, et no nyt menkääpäs te vierekkäin ja katelkaa, että meniks teil samalla tavalla, ja jos menee joku eri tavalla, niin tuota ni sit miettikää, että et niinku miten se olis kannattanu ratkasta tai kummalla se on menny pieleen. Ja sitte se joka, molemmat ikään ku perustelee sitä omaansa ja sitte useimmiten ne huomaa heti, että et okei ne myöntää, et okei nyt mul tuli virhe tässä.” (Tuula)

Opettajan ja oppilaan välinen matematiikkakeskustelu. Oppilaiden välisen matematiikkakeskustelun lisäksi painotettiin opettajan ja oppilaiden välisen matematiikkakeskustelun merkitystä. Opettajan ja oppilaiden välistä matematiikkakeskustelua kuvattiin sekä opetustuokiossa että henkilökohtaisen ohjauksen tilanteissa. Haastateltavat kuvasivat opetustaan kyseleväksi. Tällä tarkoitettiin sitä, että oppilaita ohjataan kysymysten avulla itse oivaltamaan matemaattisia ideoita sen sijaan että opettajat kertoisivat heille, miten ideat toimivat.

> ”No yleensä mä niinku kerron, et mistä täs on kysymys ja kyselen lähinnä nii, et ne lapset aina sit vastaa ja mä teen kysymyksiä niin, että, ja sit niinku rakennetaan se, että mitä tässä nyt yritetään ja mistä täs on kysymys.” (Tuula)

Lisäksi haastateltavat kertoivat pyrkivänsä esittämään asioita niin, että oppilaat voivat itse huomata logiikan matemaattisessa ideassa. Marko kertoi opettaneensa allekkainkertolaskun algoritmia siten, että oppilaat itse keskustelun ja havainnollistamisen avulla huomasivat, miten luvut kannattaa laskuun asetella. Tällöin keskustelun tukena käytettiin matematiikan havainnollistamista numeroin.

> ”Mä näytän niinku, et miten sen voi laskee, et kolme kertaa sata, se on kolmesataa. Sit kirjotetaan niinku ensimmäisel rivil kolmesataa. Sit tulee kuuskymment seuraava rivi alle. Ja sit siihen tulee se kolmonen alle, niinku yhteenlaskuks vaa. Et tää ois se oikee vastaus, mut tän vois ku ne huomaa, et tos on aika paljon nollia, et niithän voi jotenki niinku rivejä vähentää. Että pääsis siihen niinku tiivistettyyn algoritmiin kiinni.” (Marko)

Opettajan ja oppilaan välisellä henkilökohtaisella keskustelulla pyrittiin erityisesti ohjaamaan oppilaiden matemaattista ajattelua oikeaan suuntaan matematiikan tehtäviä tehdessä. Jos oppilailla on haasteita tehtävien tekemisessä, haastateltavat kertoivat pyrkivänsä auttamaan heitä kysymällä ohjailevia kysymyksiä, eikä tarjoamalla valmista ratkaisuehdotusta. Lisäksi kerrottiin, että jos oppilas huomasi tehneensä virheen, heitä ohjattiin kysymysten avulla löytämään, missä virhe on tehty, ja sitten korjaamaan se.

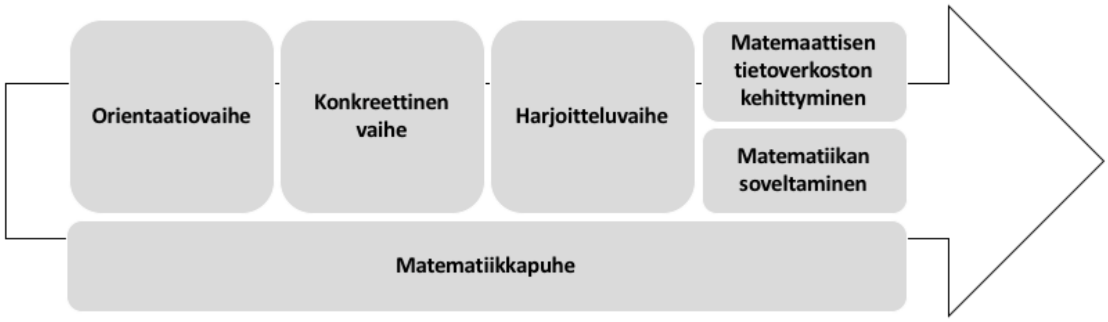
> ”Niin mietittiin sitä, että et okei no ee- ensin mietittiin, että no mitä tehdään, jos joku hinta on alennettu. Okei no sehän on sit niinku vähemmän kun se see alkuperänen hinta ja sitte ruvettiin miettimään, et no nyt tästä saadaan näin paljon alennusta. Sit mietittiin, et no mites se alennus lasketaan? Ja tehtiin niinku tavallaan monta laskua siitä.” (Tuula)

> ”[…] et joku kysyy, et no nyt mulla on kyl menny tää pieleen, että täs on nyt jotai todella outoa tapahtunu. Ja sit mietitään yhessä, että no mitä siinä, et missä kohtaa se on menny pieleen, ja okei tohon asti niinku vaikuttaa ihan ookoolta, mutta nyt tässä on tapahtunu jotain.” (Tuula)

Matematiikkapuhetta pidettiin siis ymmärryksen kehittymisen kannalta tärkeänä yhtäältä siksi, koska omaa matemaattista toimintaa sanallistaessaan oppilaat joutuvat perustelemaan ratkaisujaan, eli reflektoimaan matematiikkaa. Toisaalta tärkeänä pidettiin myös oppilaiden matemaattisen ajattelun ohjaamista keskustelun avulla. Osa opettajista toi kuitenkin esille, ettei oppitunneilla ole riittävästi aikaa kahdenkeskiseen keskusteluun oppilaiden kanssa, ja siksi suosittiin oppilaiden välisiä matematiikkakeskusteluja.

5.1.7 Yhteenveto

Haastateltavat pitivät oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kannalta tärkeänä uusien asioiden liittämistä oppilaiden aiempiin tietoihin, konkreettista toimintaa, harjoittelua ja matematiikasta keskustelemista. Oppilaiden matemaattisen tietoverkoston kehittyminen ja kyky matematiikan soveltamiseen nähtiin matemaattisen ymmärryksen kehittymisen seurauksena. Opetus-oppimisprosessiin liittyviä tuloksia ja edellä tarkasteltujen yläluokkien keskinäisiä suhteita on kuvattu Kuviossa 2.



Kuvio 2. Opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät.

Uuden matematiikan sisällön opiskeleminen tulee haastateltavien mukaan aloittaa orientoitumalla aiheeseen, minkä jälkeen käsitystä uudesta asiasta muodostetaan konkreettisen toiminnan avulla. Kun oppilaat ovat ymmärtäneet uuden asian, siirrytään harjoitteluun, jonka tavoitteena on opitun automatisoituminen. Haastateltavat kokivat, että jos uusi asia muodostuu osaksi oppilaan matemaattista tietoverkostoa ja hän pystyy soveltamaan sitä, oppilas on ymmärtänyt asian. Koska haastateltavat kuitenkin kokivat, että matemaattinen asia tulee ymmärtää ennen harjoitteluun siirtymistä, on mahdollista, että harjoittelulla pyrittiin tukemaan ennemmin menetelmän tai käsitteen sujuvaa osaamista kuin ymmärryksen kehittymistä. Näin ajateltuna harjoitteleminen ei välttämättä ole ymmärryksen kannalta välttämätön vaihe. Matematiikan puhumisen ajateltiin tukevan oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä jokaisessa vaiheessa. Matematiikkapuheen kohdalla haastateltavat painottivat erityisesti matemaattisen tiedon jäsentymisen tukemista ja oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärryksen tason selvittämistä. Sen sijaan matematiikan puhumisen roolia matemaattisen käsitteen oppimisen vaiheena konkreettisen ja abstraktin ajattelun välillä ei tuotu esille.

Vaikka opetus-oppimisprosessin eri vaiheita tuotiin esille kaikissa haastatteluissa, eri haastateltavat painottivat vastauksissaan eri vaiheita. Kolmessa haastattelussa (Maria, Sanni ja Jenni) korostui erityisesti konkreettinen vaihe. Nämä haastateltavat pitivät ymmärryksen kannalta erityisen tärkeänä sitä, että oppilas saa konkreettisten välineiden avulla itse tarkastella opittavana olevaa asiaa ja oivaltaa sen. Kahdessa haastattelussa (Marko ja Tuula) taas painottui matematiikkapuhe. Molemmat heistä pitivät tärkeänä sitä, että ymmärrystä matemaattisista käsitteistä ja ideoista rakennetaan yhdessä keskustelemalla. Koko luokan keskustelujen lisäksi Marko piti tärkeänä sitä, että oppilaat sanallistavat matemaattista ajatteluaan opettajalle. Tuula taas korosti sekä opettajan ja oppilaan että oppilaiden välistä keskustelua tehtäviä tehdessä. Teemu taas piti erityisen tärkeänä oppilaiden matemaattisen tietoverkoston kehittymistä ja pyrki tukemaan sitä esimerkiksi konkretisoimalla eri käsitteiden välisiä yhteyksiä ja keskustelemalla niistä oppilaiden kanssa. Se, mistä nämä erot painotuksissa johtuvat, ei kuitenkaan selviä tästä aineistosta.

5.2 Opettajaan liittyvät tekijät

Haastatellut luokanopettajat kokivat, että se miten hyvin matematiikan opetus tukee oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä, riippuu paljon opettajasta. Opettajan tiedoilla ja opetuksen suunnittelulla nähtiin olevan merkittävä vaikutus siihen, miten ymmärtävään oppimiseen tähtäävä matematiikan opetus voi toteutua.

5.2.1 Opettajan tieto

Aineiston perusteella ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen kannalta on tärkeää, että opettajalla on riittävät sisältötiedot ja pedagogiset sisältötiedot matematiikkaan liittyen. Lisäksi pidettiin tärkeänä sitä, että opettajalla on tietoa oppilaistaan ja heidän matemaattisesta osaamisestaan.

Opettajan sisältötieto. Kaikki haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että opettajalla on riittävät sisältötiedot matematiikasta. He olivat yhtä mieltä siitä, että opettajan tulee itsekin ymmärtää matematiikkaa, jotta hän voi tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Sanni totesi myös, että jos luokanopettajalla ei ole riittäviä matematiikan taitoja, hän on itse vastuussa taitojensa kehittämisestä. Hän toi kuitenkin myös esille, että alkuopetuksessa ei välttämättä tarvitse opettajallakaan olla kovin korkeaa matemaattista osaamista. Toisaalta monet haastateltavista pitivät tärkeänä myös sitä, että opettaja on itse innostunut ja kiinnostunut matematiikasta ja sen opettamisesta. Kaiken kaikkeaan opettajan hyviä matematiikan taitoja pidettiin välttämättöminä hyvän matematiikan opetuksen kannalta.

> ”No varmaan se vaatii ainaki tietysti sitä tietyntasosta niinku omaa matemaattista osaamista. Et jos ei sul ole sitä, niin sun on niinku vaikee lähtee sit niinku antamaan kovinkaa korkeatasosta matemaattisen ymmärryksen kehittämiseen tähtäävää opetusta.” (Teemu)

”Mut sit ne on mun mielest taas sit semmosii, et jos sä oot luokanopettajaks valmistunu, niin sitten jos sust tuntuu, et sul on haasteita niistä, ni sit sun on tehtävä asialle jotain. Et se on myös sun velvollisuus sit niinku opetella lisää ja näin.” (Sanni)

”No täs alkuopetuksessa nyt ei varsinaisesti välttämät tarvita mitään semmost tosi korkeelentost matikan osaamista, mut sul pitää olla niinkun oikeesti halu ja innostus tehä sun työs kunnolla.” (Sanni)

”No tietysti ainaki auttaa, et jos itsellä on jonkilaista matemaattista ajattelua ja ehkä myös se oma motivaatio myös. Että totaa tai se on ainaki plussaa. Mä koen, et se tarttuu oppilaisiin, jos niinku on itse innostunut.” (Jenni)

Opettajan pedagoginen sisältötieto. Sen lisäksi, että luokanopettaja itse osaa matematiikkaa, haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että luokanopettajilla on tietoa siitä, miten matematiikkaa opitaan ja millä tavoin sen oppimista ja ymmärtämistä voidaan tukea – siis matematiikan pedagogista sisältötietoa. Haastateltavat pitivät tärkeänä, että opettaja esimerkiksi tietää, millä tavoin eri-ikäiset oppilaat oppivat matematiikkaa ja mitä eri keinoja matematiikan opetuksessa voidaan hyödyntää. Toisaalta osa haastateltavista korosti myös huomion kiinnittämistä opetuksen sisältöjen järjestämiseen. He pitivät tärkeänä sitä, että luokanopettaja ymmärtää, mitä oppilaat voivat missäkin vaiheessa oppia ja mitä ennakkotietoja he tarvitsevat kunkin asian oppimiseen.

”Sit mä tarviin P.C.K.:tä, eli miten mä totaa… miten tietty asia opetetaan ja kyl mä tarviin sisältötietooki sitte itse.” (Maria)

”Ja ehkä semmosen pitää keksiä, jos sitte semmosia tapoja, et ne lapset niitä ymmärtäis.” (Tuula)

”Ja sitte tietenki, et miettii tosi tarkkaan, että mikä on järkevä oppimisjärjestys.” (Marko)

”Joo ja sitte tietenki aina pitää muistaa, et me opetetamme siis oppilaita. Et mun pitäs ymmärtää kunkin oppilaan se, et mitä se pystyy sitte missäki vaihees tekee.” (Marko)

Matematiikan opettamiseen ja oppimiseen liittyen tuotiin esille, että matematiikan ymmärtämiseen liittyy eri osa-alueita, kuten ymmärrys lukukäsitteestä ja geometrinen ymmärrys, ja että matemaattinen ymmärrys kehittyy vaiheittain. Toisaalta osa haastateltavista totesi myös, että matematiikkaa voi opettaa monella eri tavalla ja että monipuoliset lähestymistavat voivatkin tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä.

Tieto oppilaista. Haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että opettajalla on tietoa oppilaan matemaattisesta ajattelusta. Jos opettaja ei ole selvillä oppilaan matemaattisesta ajattelusta, on matemaattisen ajattelun ja ymmärryksen kehittymisen tukeminen haastavaa. Sekä diagnostista että formatiivista arviointia pidettiin tärkeänä oppilaiden matemaattisen ajattelun selvittämisessä.

Diagnostisen arvioinnin avulla pyritään selvittämään oppilaiden matemaattisen ajattelun lähtötaso ja ennakkokäsitykset ja -tiedot uuteen aiheeseen siirryttäessä. Usein näitä selvitetään erilaisten lähtötasotestien avulla, mutta Maria piti lähtötasotestejä ongelmallisina, koska niissä keskitytään yleensä siihen, mitä oppilaat eivät osaa. Haastateltavat olivatkin yhtä mieltä siitä, että paras tapa päästä selville oppilaiden matemaattisesta ajattelusta on matematiikasta keskusteleminen.

> ”No sen, että se opettaja tietää ensinnäkin.. no ensinnäki oppilaantuntemus, et se tietää niitten oppilaidensa se niinku hajonnan niissä taidoissa ja ne ennakkokäsitykset. Ennakkokäsitykset pitää aina selvittää.” (Maria)

> ”… et siin [lähtötasotesteissä] on iso ongelma. Niinku siinä alussa ruvetaan selvittämään ja kiinnitetään hirveesti huomioo niihin asioihin, mitä ei osata.” (Maria)

> ”Välillä sit on hedelmällistä ottaa just vaikka oppilaita yksitellen johonki vähän niinku testiin tai pyytää luettelemaan jotai lukujonoa tai yhteen-vähennyslaskua, jotain niinku kahden kesken, ja sit kattoo, et onks siellä mitään niinku haasteita vai meneeks se ihan ku vettä vaan.” (Jenni)

Maria mainitsi myös tutkimuspohjaiset digimateriaalit hyvänä keinona oppilaiden matemaattisen ajattelun tason selvittämiseen.

Formatiivisen arvioinnin avulla pyrittiin saamaan jatkuvasti tietoa oppilaiden matemaattisen osaamisen ja ymmärryksen tasosta, jotta opetusta voitaisiin suunnitella sen mukaan, mikä oppilaille on tarpeellista. Marko ja Tuula mainitsivat oppikirjan formatiiviset testit formatiivisen arvioinnin keinoina. Testien avulla opettajat pyrkivät saamaan tietoa siitä, ovatko oppilaat ymmärtäneet matematiikan tunneilla käsitellyt asiat.

> ”Se formatiivinen arviointi on niinku tosi tärkee. Eikä ne vaikuta mitenkää mun niinku niiten todistuksiin eikä muut, mä vaan niinku itte tiedän. Vähän niinku kokki maistaa ruokaa, et jaa “suola unohtu , laitetaas”.” (Marko)

> ”Ja sit meil on siinä Milli-mittari se ei, emmä tiiä onks se tuttu sulle. Siin on semmonen pikaformatiivinen arviointi aina, et sitä mä käytän sit niinku sattumanvarasesti, et mä tietäisin.” (Marko)

> ”Testataan ja toimitaan vai mikä tossa on, joku tän tyyppinen niinku juttu, minkä mä sit siellä melko loppupuolella.” (Tuula)

Toisaalta tällaisten testien voidaan ajatella testaavan ennemmin mekaanista osaamista kuin matemaattista ymmärrystä, minkä vuoksi haastateltavat korostivat matematiikasta keskustelemisen merkitystä myös formatiivisen arvioinnin kohdalla. Lisäksi oppilaiden matemaattista ymmärrystä pyrittiin selvittämään konkreettisten välineiden ja kirjallisen kielentämisen avulla.

> ”No paras tapahan monesti selvittää on se, että pistää oppilaan kertomaan sitä asiaa. Eli sillon ku oppilas sanallistaa jotain asiaa, ni sillonhan niinku sitä pystyy havainnoimaan, et miten se on ymmärtäny sitä asiaa.” (Teemu)

> ”Ja myös ehkä se, et osaako sit tehä vaikka välineillä, et seki kertoo siit tasosta toki, et jos onnistuu välineillä, mut ei osaa tehä vaikka kirjaan, ni sit ollaan niinku siin konkreettisten asioiden niinku levelillä.” (Jenni)

> ”No sit toki myös ihan tarkkailemalla, että niinku saako he sitä niinkun matematiikan kieltä kirjotettua sinne kirjoihin. Sit just pyytää selittämään.” (Jenni)

Osa haastateltavista mainitsi myös, että formatiivisen arvioinnin avulla saadaan tärkeää tietoa oppilaiden mahdollisista virhekäsityksistä. Opettajan sisältötieto, pedagoginen sisältötieto ja tiedot oppilaista tuotiin esille jokaisessa haastattelussa. Se, mitä tietoja painotettiin, vaihteli kuitenkin haastattelujen välillä.

5.2.2 Opetuksen suunnittelu

Opetuksen suunnittelussa pidettiin tärkeänä sitä, että opetussuunnitelman tavoitteet ohjaavat opetusta ja että oppituntien sisällöt ja menetelmät valitaan tavoitteen mukaan. Oppikirjoja ja kollegiaalista yhteistyötä saatettiin käyttää apuna suunnittelussa. Lisäksi korostettiin opettajan vastuuta ymmärryksen tukemisessa.

Tavoitteet ohjaavat opetusta. Haastateltavat olivat yhtä mieltä siitä, että matematiikan opetuksen suunnittelun on lähdettävä matematiikan opetuksen tavoitteista, jotka opettaja asettaa opetussuunnitelman mukaan. Monet haastateltavista korostivat myös opettajan vastuuta valita matematiikan oppikirja opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti. Tavoitteita pidettiin tärkeänä, koska ilman niitä opetuksen suunnittelusta ja toteuttamisesta puuttuu johdonmukaisuus ja opetuksesta saattaa tulla epämääräistä.

> ”No mun mielest täytyy nyt sit niinku ite tietää tosi vahvasti, että niinku mitä, mikä on se punanen lanka siinä tunnissa ja mitä haluaa niinku oppilaiden ymmärtävän ja toki sit se, et itse ymmärtää.” (Jenni)

> ”Ja sitte myös sen, että totaa.. opettaja tuntee opetussuunnitelman hyvin, että sieltä lähtee se suunnittelu: mitä tavotellaan. Ja sitte vasta sen perusteella valitaan niinku toiminnat ja välineet ja tehtävät.” (Maria)

Haastateltavilla oli kuitenkin erilaisia näkemyksiä siitä, mikä on tunnin tavoite. Osa opettajista ajatteli, että oppitunnin sisältö on myös tavoite. Eli jos oppitunnin sisältö on esimerkiksi kahden kertotaulu, on tunnin tavoite oppia kahden kertotaulu. Osa taas ajatteli, että oppitunnin tavoite on eri asia kuin tunnin sisältö. Tällöin ajateltiin usein, että opetuksen tavoite jakautuu usealle eri oppitunnille, joilla käsitellään eri sisältöjä.

> ”No matematiikka on siis siitä helppo, että yleensä matikassa se opeteltava sisältö on myös sit se tavote.” (Marko)

> ”Ne tavotteet on sit niinku se opittava asia. Et jos sen asian sais opeteltua.” (Tuula)

> ”Mut seki voi olla, et se tavote jakautuu niinku useemmalle tunnille, et se on vaik niinku kuukauden tavote on se, et me opitaan se kymmenylitys. Ja sit se on niinku jokasen tunnin tavoite.” (Sanni)

> ”No tavote vois olla vaikka, että oppilaan ymmärrys kymmenjärjestelmästä vahvistuu. Ja sitte sitte sil on niinku.. tai että oppilas oppii kymmenylityksen. Tai oppilas oppii kymppipa-rit. Ni se tavote ois niinku tollanen ja sitte siihen liittyvät sisällöt on jotain muuta.” (Maria)

Maria korosti, että oppitunteja suunniteltaessa yksi tavoite on parempi kuin monta tavoitetta. Tätä hän perusteli sillä, että useaan tavoitteeseen keskittyminen yhtä aikaa ei ole oppimisen kannalta hyödyllistä.

> ”Ja mul on semmonen sääntö, … et valkatkaa mieluummin yks tavote, ku monta tavotetta. Semmosel jol on monta tavotetta, ni sil ei oo enää yhtää tavotetta. Yhteen asiaan vaa voi keskittyä siis. Jos sinne kovin montaa yrittää saada, ni ei niit pysty hallitsee.” (Maria)

Sisältöjen valitseminen. Kun opetuksen suunnittelu perustuu opetuksen tavoitteisiin, myös kaikki oppituntien sisällöt ja menetelmät valitaan tavoitteiden mukaan. Haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että kaikki, mitä oppitunneilla tehdään, edistää tavoitteeseen pääsyä. Tällä tarkoitettiin sitä, että opetuksen suunnittelu tulisi tehdä tavoitteet edellä, eikä oppitunteja näin rakennettaisi tiettyjen toimintojen varaan vain siksi, että ne ovat mielenkiintoisia tai hauskoja.

> ”… ne materiaalit ei niinku päätä mitä siellä tunnilla tapahtuu. Vaan se on se opettaja, et minkä tavotteen opettaja on asettanu ja sitte se toiminta pitää niinku muokata sen mukaan, et siihen tavotteeseen päästään.” (Maria)

> ”Mut se ei välttämät niinku.. se ei itsessään välttämättä se tietty niinkun materiaali niinkun tuo sitä vahvuutta, vaan se, että että niinku sen materiaalin avulla päästään johonkin.” (Sanni)

Moni haastateltava painotti erityisesti sitä, että matematiikan oppikirja ei voi määrittää matematiikan opetuksen suunnittelua. Oppikirjat voivat kuitenkin tukea opetuksen suunnittelua. Haastatteluissa pidettiin tärkeänä sitä, että opettaja suhtautuu oppikirjan sisältöihin kriittisesti. Jos oppikirjojen tehtävät tai kappaleet eivät ole tavoitteiden kannalta olennaisia, voi ne jättää väliin ja tehdä jotain muuta, mikä edistää tavoitteen toteutumista.

> ”Et ehkä sit se, et pitäis olla uskallusta irrottautuu siit kirjasta, jos siin ei nyt sit ookkaan just sille seuraavalle tunnille sopivaa hommaa. Tehä sit jotai muuta.” (Sanni)

> ”No valikoin. Joo kyllä. Joo. Et se selkeesti mä haluun niinku olla se, et mä päätän ite, että mitä tehdään. Ja milloin ja mikä tehtävä palvelee sitä mun niinku tavotetta parhaite.” (Maria)

Lisäksi suunnittelussa pidettiin tärkeänä sitä, että eri opetusvälineet ja -menetelmät valitaan sen mukaan, että ne tukevat oppilaiden matematiikan oppimista ja ymmärrystä mahdollisimman hyvin. Marko totesi myös, että matematiikan tunneilla tulee varata tarpeeksi aikaa tärkeimpiin asioihin. Esimerkiksi jos opittava asia on monimutkainen, tulee opetustuokioon ja -keskusteluun varata tarpeeksi aikaa ja jättää jotain muuta pois oppitunnilta. Maria toi esille myös muiden oppiaineiden integroimisen matematiikkaan, mikäli se tukee oppimista

> ”Ni sil on ihan hirveen suuri merkitys sen asian oppimisen kannalta. Et ei mihinkää muuhun käytettäis aikaa sitte. Et esimerkiks jos tulee tosi vaikee asia, ni mä saatan jättää vaikka sillä tunnil, et ei tehä mitää ongelmanratkasua.” (Marko)

> ”Teen tällasii niinku liikuntaa ja matematiikkaa yhdisteleviä pelejä ja toiminnallisii tuokioita, mitä oppilaat rakastaa.” (Maria)

Opettajan vastuu ymmärryksen tukemisesta. Matematiikan opetuksen suunnittelusta puhuttaessa korostui, että matemaattisen ymmärryksen tukeminen on opettajan vastuulla. Tätä perusteltiin sillä, että oppikirjojen ei koettu automaattisesti tukevan ymmärryksen kehittymistä, jolloin oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittyminen riippuu pitkälti opettajan suunnittelemasta opetuksesta. Oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymisen tukemista pidettiinkin ensisijaisesti opettajan tehtävänä. Sanni painotti myös, että opettajan on tehtävä paljon töitä oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymisen eteen.

> ”Et kirja on sit se toissijanen juttu, et kyl se opettajan tehtävä on niinku varmistaa se, et se ymmärrys niinku on tapahtunu.” (Sanni)

> ”Ja mä ajattelen vähän sillä tavalla, et jos joku lapsi ei jotain osaa, niin mun on niin kauan etsittävä keinoa, kunnes hän on sen niinkun ymmärtäny.” (Sanni)

Kollegiaalinen yhteistyö. Matematiikan opetuksen suunnittelemisessa pidettiin hyödyllisenä yhteistyötä kollegoiden, eli muiden opettajien kanssa. Esimerkiksi saman luokkatason muiden opettajien kanssa saatettiin yhdessä suunnitella, mitä matematiikan opetuksessa voidaan tehdä. Lisäksi mainittiin, että kollegoilta voi saada materiaaleja ja ideoita matematiikan opetukseen.

> ”Ja sit me tos ryhmis kyl niinku mietitään ihan hirveen paljon niinku, et miten vois jonku tehdä. Et mitä uutta me kehitetään.” (Marko)

Neljä haastateltavista kertoi myös hyödyntävänsä samanaikaisopetusta matematiikan tunneilla. Osa opettajista toi oppilaiden matematiikan sanallistamisen yhteydessä esille ongelman opettajan rajallisista resursseista, eli siitä, ettei yksi opettaja kerkeä kuulemaan jokaisen oppilaan matemaattista ajattelua samalla tunnilla. Tähän ongelmaan samanaikaisopetusta pidettiin hyvänä ratkaisuna. Toisaalta samanaikaisopetus nähtiin hyvänä ratkaisuna myös matematiikan eriyttämiseen.

> ”Ja sitte ehkä hyödyntäisin just samanaikaisopetusta ja pienissä ryhmissä niinku juttelisin. Et jotenki saatas ne lapset niinku puhumaan mahollisimman paljon sitä, sitä heiän omaa ajattelua niinku auki.” (Maria)

> ”mä kans, siin on sitä opettajaresurssia niin, et me pystytään joustavasti sit tekemään niitä ryhmiä. Esimerkiks niin, että toinen ottaa vaikka neljä oppilasta, jolla on joku sama juttu, mitä ne ei ymmärrä. Ja sitte toinen pitää kaikkia niitä kahtakytkahta muuta.” (Tuula)

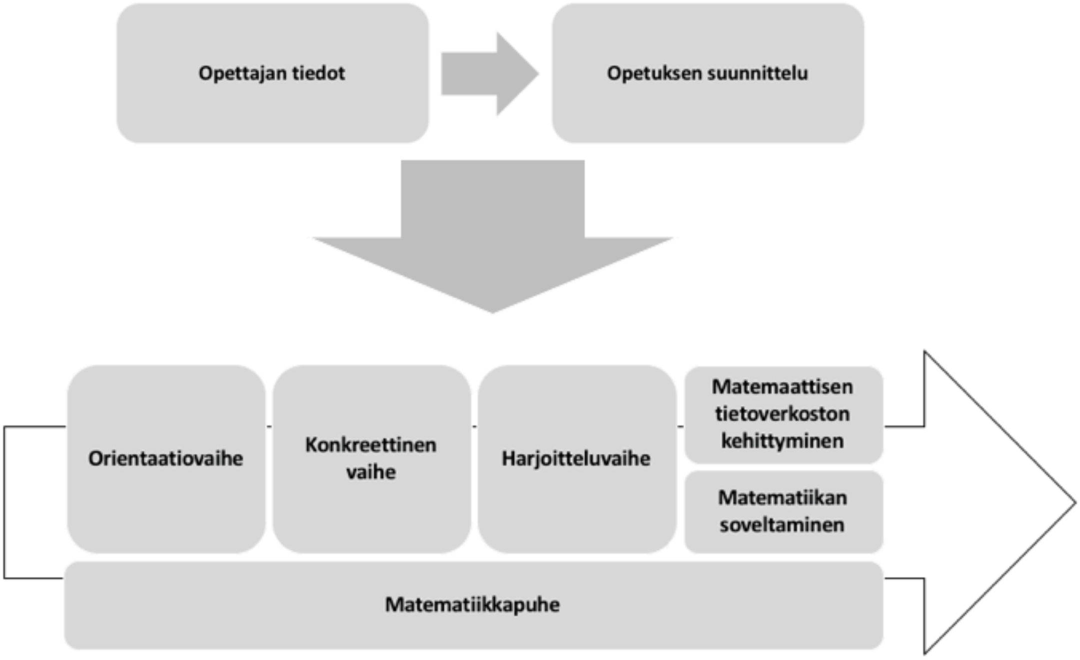
Haastateltavien käsityksissä matematiikan opetuksen suunnittelusta korostui ennen kaikkea ajatus siitä, että suunnittelun lähdettävä opetussuunnitelman tavoitteista. Opettajan suunnittelemien ja toteuttamien opetustuokioiden tärkeimpänä tavoitteena nähtiin oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittyminen. Lisäksi monet haastateltavista pitivät kollegiaalista yhteistyötä hyödyllisenä matematiikan opetuksen suunnittelussa ja toteuttamisessa.

5.2.3 Yhteenveto

Haastateltavien käsitysten mukaan matematiikan opettajalla, eli tässä tapauksessa luokanopettajalla, on vaikutus siihen, tukeeko matematiikan opetus oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Haastateltavat pitivät tärkeänä sitä, että opettajat osaavat ja ymmärtävät matematiikan sisällöt itse hyvin ja että heillä on riittävästi tietoa myös siitä, miten matematiikkaa tulee opettaa. Lisäksi opettajat tarvitsevat tietoa oppilaistaan ja heidän matemaattisesta osaamisestaan. Kun opettajalla on riittävät tiedot matematiikasta, sen opetuksesta sekä oppilaista, on opettajan mahdollista suunnitella matematiikan opetusta niin, että se parhaalla mahdollisella tavalla tukee matematiikan ymmärtävää oppimista.

5.3 Yhteenveto

Haastatteluaineistoni perusteella jaottelin ymmärrykseen tähtäävään opetukseen vaikuttavat tekijät kahteen teemaan. Ensimmäinen teema, *opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät*, liittyy ensisijaisesti siihen, miten oppilaan matemaattisen ymmärryksen nähtiin rakentuvan ja miten sitä on mahdollista tukea. Toinen teema, *opettajaan liittyvät tekijät*, puolestaan keskittyy opettajan omiin tietoihin matematiikasta, sen opetuksesta, oppilaista ja opetuksen suunnittelusta. Tutkimuksen tulosten yhteenveto on kuvattu Kuviossa 3.



Kuvio 3. Ymmärtävään oppimiseen tähtäävään matematiikan opetukseen vaikuttavat tekijät.

Opetus-oppimisprosessiin liittyvät tekijät. Matematiikan opetuksen tavoitteena on, että oppilas oppii matematiikkaa. Oppilaan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä kuvattiin prosessina, joka sisältää orientaatiovaiheen, konkreettisen vaiheen ja harjoitteluvaiheen. Näiden vaiheiden seurauksena oppilaan matemaattinen tietoverkosto kehittyy ja oppilas oppii soveltamaan matematiikkaa. Matematiikkapuhe tukee oppilaan matematiikan oppimista prosessin jokaisessa vaiheessa.

Opettajaan liittyvät tekijät. Opettaja tarvitsee matematiikan opetukseen matemaattista osaamista, tietoa matematiikan opetuksesta sekä tietoa opetettavista oppilaista. Näiden tietojen avulla opettaja suunnittelee ja toteuttaa matematiikan opetustaan.

Opettajan vaikutus opetus-oppimisprosessiin. Koska opettajan tiedot vaikuttavat opetuksen suunnitteluun, ne vaikuttavat myös siihen, millaisena matematiikan opetus käytännössä toteutuu. Matematiikan opetus taas vaikuttaa oppilaiden oppimisprosessiin. Näin ollen opettajien tiedot vaikuttavat siihen, miten hyvin opettajat pystyvät matematiikan opetuksessaan tukemaan oppilaiden oppimisprosessia ja matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Näiden tietojen välttämättömyys korostuu, jos ajatellaan jonkin niistä puuttuvan. Esimerkiksi jos opettaja ei itse ymmärrä matematiikkaa murtolukujen laskutoimitusten taustalla, on hänen hyvin vaikeaa opettaa murtolukujen laskutoimituksia ymmärrettävästi. Samanlaisen ajatusleikin voi tehdä myös pedagogisen sisältötiedon ja tiedon oppilaista kohdalla. Ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteutuminen vaikuttaakin riippuvan ennen kaikkea opettajasta.

6 Luotettavuus

Tässä luvussa tarkastelen tutkimukseni luotettavuutta. Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arvioinnista ei ole yhtenäistä käsitystä. Eskola ja Suoranta (1998, s. 211) korostavat luotettavuuden arvioinnissa tutkimusprosessin luotettavuutta. Ruusuvuori ja kumppanit (2010, s. 27) taas painottavat tutkimusprosessin systemaattisuutta esimerkiksi tutkijan tekemien valintojen, rajausten ja analyysin etenemisen suhteen. Olen pyrkinyt lisäämään tutkielmani luotettavuutta kuvaamalla tutkielman toteutusta mahdollisimman tarkasti luvuissa 4.2 ja 4.3. Tässä luvussa pohdin tarkemmin luotettavuuteen liittyviä seikkoja. Kiinnitän huomiota myös tutkimuksen toteuttamisen heikkouksiin, mitä pidetään myös tärkeänä tutkimuksen luotettavuuden arvioinnin kannalta (Ruusuvuori, ym., 2010, s. 27).

Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuuden kriteereinä pidetään usein uskottavuutta ja siirrettävyyttä. Eskola ja Suoranta (1998, s. 212) korostavat tutkimuksen uskottavuuden kannalta sitä, että tutkijan tekemät tulkinnat tutkittavien käsityksistä vastaavat tutkittavien käsityksiä. He toteavat kuitenkin, ettei tulkintojen tarkistuttaminen tutkittavilla välttämättä lisää tutkimuksen luotettavuutta. Olen pyrkinyt lisäämään tutkielmani uskottavuutta liittämällä tulkintojeni yhteyteen otteita haastatteluista, jotta lukijan on mahdollista arvioida tulkintojani. Siirrettävyydellä Eskola ja Suoranta (1998, s. 68) tarkoittavat ”tutkimuksen havaintojen soveltumista toiseen ympäristöön”, eli sitä voiko tutkimuksen tuloksia yleistää. He huomauttavat kuitenkin, että siirrettävyyden arviointi jää lukijan vastuulle, minkä vuoksi aineiston riittävän tarkka kuvaaminen on tarpeellista. Näin ollen olen pyrkinyt kuvaamaan tutkimukseni tulokset siten, ettei aineiston ja siitä tehtyjen tulkintojen välille jäisi epäselvyyksiä. Lisäksi toteutin aineistoni analyysin jatkuvassa vuorovaikutuksessa tutkimuksen teoreettiseen viitekehykseen. Tuon varsinkin pohdinnassa esille aineiston ja teorian välistä vuoropuheula, mitä pidetään olennaisena tutkimuksen merkityksen kannalta (Tuomi & Sarajärvi, 2009, s. 18; Salo, 2015, s. 180).

Lisäksi luotettavan laadullisen tutkimuksen tulee olla refleksiivistä. Högbacka ja Aaltonen (2015, s. 9) tarkoittavat refleksiivisyydellä sitä, että tutkija huomioi oman vaikutuksensa tutkimukseen sen kaikissa vaiheissa. Koska olin perehtynyt tutkielmani aiheeseen liittyvään tutkimukseen ennen aineistonkeruuta ja analyysia ja minulla oli toki omiakin ajatuksia aiheesta, vaikuttivat ennakkotietoni ja -käsitykseni esimerkiksi siihen, millä tavoin keräsin tietoa aiheesta, mihin asioihin aineistonkeruussa keskityin ja jossain määrin varmasti myös siihen, miten tulkitsin aineistoani. Koska olen kuitenkin pyrkinyt parhaani mukaan tiedostamaan omat ennakkoajatukseni, uskon pystyneeni suhtautumaan avoimella kiinnostuksella myös asioihin, jotka olivat minulle uusia tai osin ristiriidassa omien ajatuksieni suhteen.

Valitsin tutkimusmenetelmäkseni laadullisen sisällönanalyysin, vaikka sitä on myös kritisoitu, koska itse analyysi jää sisällönanalyysissa usein pinnalliseksi aineiston luokitteluksi ja uudelleen järjestämiseksi (esim. Salo, 2015; Tuomi & Sarajärvi, 2009; Ruusuvuori, ym., 2010). Högbacka ja Aaltonen (2015, s. 20) toteavatkin, että aineiston koodaaminen ja luokittelu on vasta aineiston järjestämistä. Myös Salo (2015, s. 166) muistuttaa, että järjestetty aineisto ei semmoisenaan tuota tutkimukselle tulosta. Ruusuvuoren ja kumppaneiden (2010, s. 11–12) mukaan luokittelu on kuitenkin hyvä tapa ottaa aineisto haltuun, vaikka se ei analyysiksi yltäisikään. Sisällönanalyysissa voi kuitenkin pyrkiä kaivautumaan myös pintaa syvemmälle. Salo (2015, s. 182) ehdottaa ratkaisuksi "aineiston ajattelemista teorian kanssa", millä hän tarkoittaa aineistosta nousevien asioiden kytkemistä tutkimuksen teoreettiseen viitekehykseen. Hän esittää lisäksi melko kärkkäästi, että ilman teoreettista perustaa analyysi on merkityksetöntä (Salo, 2015, s. 180). Myös Högbacka ja Aaltonen (2015, s. 19) toteavat, että analyysin kriittinen vaihe on juuri empirian ja teorian sovittaminen yhteen. Valitsin menetelmäkseni sisällönanalyysin sen saamasta kritiikistä huolimatta ja pyrin syventämään analyysiani liittämällä sen vankasti tutkielmani teoreettiseen viitekehykseen.

Käytin aineistoni koodaamiseen Atlas.ti-ohjelmaa. Jolanki ja Karhunen (2010, s. 396) esittävät, että erilaisten analyysiohjelmien avulla tutkimustehtävän kannalta olennaisten tekstikatkelmien yhteen kokoaminen ja niihin palaaminen on sujuvaa. Eskola ja Suoranta (1998, s. 209) puolestaan toteavat, että tällaisten ohjelmien avulla on joissain tapauksissa mahdollista hahmottaa aineiston painopisteitä ja välttää turhien yksityiskohtien nousemista tulkintojen keskukseen. He toteavat kuitenkin myös, ettei analyysiohjelmat pysty takaamaan tehdyn työn luotettavuutta. Koska haastatteluaineistoni oli noin 70 sivua pitkä, koin, että analyysiohjelman käyttö helpotti laajassa aineistossa liikkumista ja koodaamisen systemaattisuutta, minkä uskon tehneen aineiston käsittelystä luotettavampaa.

Tuomi ja Sarajärvi (2009) tuovat tutkimuksen luotettavuuden suhteen esille myös tutkimuksen eettisen kestävyyden. Pyrin aineiston keruussa ja käsittelyssä ottamaan huomioon eettiset vaatimukset. Toin haastateltavilleni jo haastattelukutsussa esille tutkielmani tavoitteet ja sen, mitä aiheita haastatteluissani tullaan käsittelemään. Korostin useaan otteeseen, että haastatteluun osallistuminen on täysin vapaaehtoista ja että tutkimukseeni osallistuminen on mahdollista perua milloin tahansa. Lisäksi vakuutin haastateltaville ja pidin huolen siitä, että haastatteluaineistoja tulen käsittelemään vain minä ja että aineistot eivät tule olemaan muiden saatavilla. Haastateltavien anonymiteetin olen säilyttänyt kertomalla tutkielmassa vain tutkimuksen kannalta välttämättömät tiedot haastateltavistani.

Sain aineistoni ja sen analyysin perusteella vastauksen tutkimuskysymyksiini. Aineistoni luotettavuutta olisi kuitenkin mielestäni voinut lisätä ainakin kolmella tavalla. Ensinnäkin kuudesta haastattelusta koostuva aineistoni on verrattain pieni. Eskolan ja Suorannan (1998, s. 62) mukaan laadullisessa tutkimuksessa ei kuitenkaan ole olemassa selkeitä sääntöjä aineiston koon suhteen. Totesinkin aineiston riittäväksi, koska jo kolmannen ja neljännen haastattelun kohdalla haastateltavien vastausten sisällöt alkoivat toistaa itseään. Jos olisin kuitenkin haastatellut vielä muutamaa luokanopettajaa, olisi vastaan voinut tulla uusiakin näkemyksiä aiheesta.

Toiseksi kehityskohdaksi nostan haastateltavien valinnan. Eskolan ja Suorannan (1998, s. 18) mukaan laadullisessa tutkimuksessa on hyödyllistä valita tutkittavat tutkimustehtävän kannalta oleellisten kriteerien mukaan. Halusin valita haastateltavikseni luokanopettajia, joilla olisi mahdollisimman paljon tietoa oppilaiden matemaattisen ymmärryksen tukemisesta. Tällaisten tietojen selvittäminen ennakkoon on kuitenkin varsinkin gradun mittasuhteissa haastavaa, joten jouduin tyytymään omaan harkintaani ja graduohjaajani tietoihin haastateltavien valinnan suhteen.

Lisäksi olisin voinut saada monipuolisempaa tietoa tutkimukseni aiheesta, jos olisin päässyt myös seuraamaan haastateltavieni oppitunteja. Ruusuvuoren ja kumppaneiden (2010, s. 11) mukaan haastattelututkimuksen tukena käytetäänkin usein esimerkiksi havainnointia. Alkuperäinen suunnitelmani oli käydä ennen haastattelua seuraamassa yksi oppitunti kultakin haastateltavalta. Tällöin olisin voinut saada objektiivisemman kuvan heidän matematiikan opetuksestaan, minkä lisäksi haastattelussa olisi voitu keskustella seuratusta oppitunnista. Näin olisin voinut saada kokonaisvaltaisemman käsityksen tutkittavien keinoista tukea oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Oppituntien seuraaminen ei kuitenkaan ollut mahdollista, koska aineistonkeruuajankohtana koulut oli suljettu koronaviruspandemian vuoksi.

7 Pohdintaa

Pro gradu -tutkielmani tarkoituksena oli selvittää matematiikan opetukseen orientoituneiden luokanopettajien käsityksiä matematiikan ymmärtävän oppimisen tukemisesta alakoulussa. Halusin kiinnittää huomiota erityisesti niihin opetuksen keinoihin, joilla opettajat pyrkivät vaikuttamaan oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymiseen. Lisäksi olin kiinnostunut siitä, mitä asioita opettajat pitävät merkittävinä oppilaiden matemaattista ymmärrystä tukevan matematiikan opetuksen toteutumisen suhteen. Seuraavaksi pohdin ensin matemaattisen ymmärryksen kehittymisen tukemisen keinoja, minkä jälkeen keskityn vielä muihin seikkoihin, jotka vaikuttavat ymmärryksen tukemisen toteutumiseen matematiikan opetuksessa.

Luokanopettajat kuvasivat oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä tukevaa opetusta prosessina, joka sisältää uuteen aiheeseen orientoitumista, konkreettista toimintaa, harjoittelua ja matematiikkapuhetta. Oppilaiden matemaattisen tietoverkoston ja matematiikan soveltamiskyvyn kehittymisen he näkivät ymmärtämisen seurauksena. Näin ollen luokanopettajien kuvaama prosessi muistutti paljon Koskisen (2016, s. 171) kuvaamaa ymmärtävän oppimisen opetus-oppimisprosessia. Haastateltavien kuvaamasta prosessista puuttui kuitenkin Koskisen prosessin päättävä koontivaihe, jossa pyrkimyksenä on muodostaa kokonaiskuva opitusta. Myös orientaatiovaihe tuli esille vain osassa haastatteluista. Orientaatio- ja koontivaiheet ovat juuri ne opetus-oppimisprosessin vaiheet, jotka liittävät yksittäisen matematiikan asian laajempaan matematiikan kokonaisuuteen. Jos matematiikan opetuksessa ei tueta eri käsitteiden ja ideoiden välisiä yhteyksiä, on vaarana se, että oppilaan matemaattiseen tietoon ei myöskään kehity näitä yhteyksiä.

Konkreettisuus, harjoittelu ja matematiikkapuhe sen sijaan tulivat esille kaikissa haastatteluissa. Erityisesti konkreettisuuden ja matematiikkapuheen merkitystä korostettiin oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymisen kannalta, mikä on linjassa matematiikan opetuksen tutkimuksessa yleisen käsityksen kanssa ymmärryksen kehittymisen tukemisesta (ks. esim. Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert, ym., 1997; Koskinen, 2016). Haastateltavilla vaikutti olevan myös selkeä käsitys siitä, millä tavoin konkreettiset välineet ja matematiikasta puhuminen parhaiten tukevat matematiikan ymmärtävää oppimista.

Myös harjoittelua pidettiin tärkeänä matematiikan ymmärtämisen suhteen. Matematiikan harjoittelussa oppikirjan perustehtävät ovat haastateltavien mukaan isossa roolissa. Haastateltavien opettajien käsitykset ymmärrystä tukevista matematiikan tehtävistä vaikuttavatkin olevan hieman ristiriidassa ymmärtävän oppimisen tutkimuksen käsitysten kanssa. Tutkimuksissa painotetaan, että oppilaan matemaattista ymmärrystä tukevat tehtävien tulisi olla sellaisia, että oppilaalla ei ole valmista ratkaisutapaa niihin ja että oppilas joutuu tehtävää tehdessään soveltamaan tietojaan ratkaisun saamiseksi (esim. Hiebert, ym., 1997). Matematiikan soveltamisen ajatellaan tukevan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä paremmin kuin rutiinitehtävien laskemisen. Haastatteluissa matematiikan soveltaminen ja ongelmatehtävien ratkominen nähtiin kuitenkin ennemmin ymmärryksen seurauksena kuin tukemisen keinona. Myös Patrikainen (2012, s. 307) havaitsi luokanopettajien opetuskäsityksiä käsittelevässä väitöskirjassaan, että ongelmalähtöinen oppiminen ei vaikuta toteutuvan matematiikan opetuksessa, vaikka sitä opetussuunnitelmassa (POPS, 2014) painotetaankin. Pehkonen (2011, s. 23) ehdottaakin, että ongelmalähtöisten tehtävien toimivuutta tulisi demonstroida opettajille täydennyskoulutuksissa.

Matematiikan opetukseen ja oppimiseen liittyvien tekijöiden lisäksi haastateltavat korostivat opettajaan liittyviä tekijöitä ymmärrykseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteutumisen kannalta. He pitivät erittäin tärkeänä, että myös opettaja itse osaa ja ymmärtää matematiikkaa hyvin sekä tietää, miten matematiikkaa tulisi opettaa. Jos opettajalla ei ole riittäviä matematiikan taitoja ja tietoja matematiikan opetuksesta, hän joutuu turvautumaan matematiikan oppikirjaan, jonka taas ei nähty haastatteluissa yksin tukevan matemaattisen ymmärryksen kehittymistä. Sama ongelma on tuotu esille useissa matematiikan oppikirjoja ja opetusta koskevissa tutkimuksissa (esim. Joutsenlahti & Vainionpää, 2007; Vainionpää & Joutsenlahti, 2010b; Perkkilä, ym., 2018).

Se, tukeeko matematiikan opetus oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä, vaikuttaakin riippuvan ennen kaikkea opettajasta ja hänen tiedoistaan ja käsityksistään matematiikkaan ja sen opetukseen liittyen. Matematiikan opetuksen tutkimuksen keskuudessa on usein noussut huoli siitä, ovatko luokanopettajien matematiikkataidot riittäviä opetussuunnitelman painottaman ongelmalähtöisen ja ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteuttamiseen (esim. Pehkonen, 2011; Hihnala, 2011; Tossavainen & Leppäaho, 2018). Ongelman ratkaisuksi on ehdotettu esimerkiksi matematiikkataitojen testaamista luokanopettajankoulutuksen pääsykokeissa (Hihnala, 2011;

Tossavainen & Leppäaho, 2018), minkä lisäksi matematiikan didaktiikan kursseilla on todettu voivan olla vaikutusta luokanopettajaopiskelijoiden käsityksiin matematiikasta (Kaasila & Laine, 2018).

Jatkossa tulisikin keskittyä vielä tarkemmin siihen, millä tavoin ja kuinka paljon opettajien matematiikkataidot ja käsitykset matematiikasta ja sen oppimisesta vaikuttavat ymmärrykseen tähtäävän matematiikan opetukseen toteutumiseen koulussa. Matematiikan opetuksesta kiinnostuneiden opettajien lisäksi tulisi tutkia matemaattisen ymmärryksen tukemista koskevia käsityksiä myös sellaisilta opettajilta, joilla on itsellään heikot matematiikan taidot. Näin voitaisiin saada selville, mitä ovat ydinongelmat ymmärtävään oppimiseen tähtäävän matematiikan opetuksen toteutumisen suhteen. Tällainen tieto auttaisi entisestään kohdistamaan matematiikan opetuksen tutkimuksen ja opettajankoulutuksen resurssit näiden ongelmien ratkaisemiseen.

Matemaattisen ymmärryksen tukemiseen on jo olemassa monipuolisia keinoja ja näkökulmia. Niistä ei kuitenkaan ole varsinaista hyötyä, jos ne eivät päädy matematiikan oppitunneille asti. Se, rantautuvatko lukuisat ehdotukset matematiikan opetuksen toteuttamisesta kouluihin asti, riippuu opettajista ja heidän kouluttamisestaan. Mikäli opetussuunnitelman ja matematiikan opetuksen tutkimuksen painottaman sosio-konstruktivistisen opetuskäsityksen toivotaan toteutuvan opetuksessa, on ennen kaikkea keskitytävä opettajiin.

Lähteet

Aaltonen, K. & Pitkäniemi, H. (2001). Opettajan ajattelun ja opetuksentoteutuksen välinen mysteeri: voidaanko se paljastaa? *Kasvatus 32*(4), 401–418.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T. & Higgins, S. J. (2009). *Primary Mathematics: Teaching for Understanding*. Maidenhead, England: Open University Press. Print.

Brinkmann, S. (2014). Doing without data. *Qualitative Inquiry.*, *20*(6), 720–725. Luettu 10.1.2020. Saatavilla: https://doi-org.libproxy.helsinki.fi/10.1177/1077800414530254

Brinkmann, S. (2018). The interview. Teoksessa K. D. Denzin & Y. S. Lincoln (toim.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research (Fifth edition.)* (ss. 576–599). SAGE.

Brown, T. (1996). Intention and significance in the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 52–66.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal, 47*(5), 256–265.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41–62.

Boggan, M., Harper, S. & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies, 3*, 1–6.

Cramer, K., & Post, T. (1995). Facilitating children's development of rational number knowledge. Teoksessa D. Owens, M. Reed, & G. Millsaps (toim.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of PME-NA.* (ss. 377–382). Columbus, OH: PME.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 226–257.

D'Angelo, F., & Iliev, N. (2012). *Teaching mathematics to young children through the use of concrete and virtual manipulatives*. Bloomsburg University of Pennsylvania. Luettu: 12.1.2020. Saatavilla: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED534228.pdf

Eskola, J., & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino.

Galperin, P. J. (1957). An experimental study in the formation of mental actions. (transl. N. Parsons) Teoksessa B. Simon (toim.), *Psychology in the Soviet Union* (ss. 213–225). London: Routledge and Kegan Paul.

Galperin, P. J., & Talyzina, N. F. (1961). Formation of elementary geometrical concepts and their dependence on directed participation by the pupils. (kääntänyt H. Asher). Teoksessa N. O'Connor (toim.), *Recent Soviet Psychology* (ss. 247–272). Oxford: Pergamon Press.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 50–83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Hashweh, M. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 11*(3), 273–292.

Helenius, J., Salonen-Hakomäki, S., Vilkka, H., Saaranen-Kauppinen, A. & Eskola, J. (2015). Teorian ja empirian vuoropuhelu tutkimuksessa: reflektioita ja ratkaisuja. Teoksessa S. Aaltonen & R. Högbacka (toim.), *Umpikujasta oivallukseen: refleksiivisyys empiirisessä tutkimuksessa.* (ss. 191–217). Tampere: Tampereen yliopisto.

Herscovics, N., & Bergeron, J.C. (1983). Models for understanding. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23*(2), 32–37.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. A. Grouws (toim.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 65–97). New York: Macmillan Publishing Company.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding.* Portsmouth, NH. Print.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 98–122.

Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen : peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä*. Jyväskylän yliopisto.

Häggblom, L. (2004). Use of manipulatives in instruction and learning. Teoksessa E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winslow (toim.), *Nordic Presentations. Proceedings of the sectionNordic Presentations at ICME-10,* July 12 2004 in Copenhagen (Denmark).

Högbacka, R. & Aaltonen, S. (2015). Refleksiivisyyden ulottuvuudet. Teoksessa S. Aaltonen & R. Högbacka (toim.), *Umpikujasta oivallukseen: refleksiivisyys empiirisessä tutkimuksessa.* (ss. 9-31), Tampereen yliopisto.

Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. (2004). Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 222-240). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Johanning, D. I. (2008). Learning to use fractions: Examining middle school students' emerging fraction literacy. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 281–310.

Jolanki, O., & Karhunen, S. (2010). Renki vai isäntä? - Analyysiohjelmat laadullisessa tutkimuksessa. In J. Ruusuvuori, P. Nikander, & M. Hyvärinen (Eds.), *Haastattelun analyysi* (ss. 395–410). Vastapaino.

Jones, J. & Tiller, M. (2017). Using concrete manipulatives in mathematical instruction. *Dimensions of Early Childhood, 45*(1), 18–23.

Joutsenlahti, J. (2004). Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 363–380). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 410–430). Porvoo: Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää J. (2007). Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.), *Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet: Ainedidaktinen symposium 9.2.2007.* Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 77, Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 184–191.

Kaasila, R. & Laine, A. (2018). Miten tulevien luokanopettajien matematiikkakuvaan voidaan vaikuttaa? Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 306–318). Porvoo: Niilo Mäki Instituutti.

Kaasila, R., Laine, A. & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajaksi opiskelevien matematiikkakuva ja sen muuttuminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 397–413). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 583–607.

Koskinen, R. (2016). *Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana: Systemaattinen analyysi Journal of Research in Mathematics Education aikakauslehden artikkelien pohjalta.* Helsingin yliopisto, Tutkimuksia 379.

Koskinen, R. & Pitkäniemi, H. (2020). Matematiikan opetus mielekkään oppimisen edistämisessä: integratiivista mallia kohti. *Ainedidaktiikka 4*(1), 79–98.

Krzywacki, H. & Portaankorva-Koivisto, P. (2018). Suomalainen matematiikan opettaja. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 278–291). Porvoo: Niilo Mäki Intituutti.

Leino, J. (2004). Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 20–31). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Lindgren, S. (1990). *Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opetuksessa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla.* Tampereen yliopisto.

Malinen, P. & Pehkonen, E. (2004). Matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimuksesta Suomessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 11–19). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 301–319). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Patrikainen, S. (2012). *Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa*. Helsinki: Helsingin yliopisto, Tutkimuksia 342.

Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (ss. 11–28). Helsinki: Helsingin yliopisto, Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Tutkimuksia 328.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa.* Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 344–367). Porvoo: Niilo Mäki Instituutti.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How we can characterise it and can we present it? *Educational Studies in Mathematics, 9*(3), 7–11.

POPS (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* Helsinki: Opetushallitus.

Ruusuvuori, J., Nikander, P. & Hyvärinen, M. (2010). Haastattelun analyysin vaiheet. Teoksessa M. Hyvärinen, P. Nikander & J. Ruusuvuori (toim.), *Haastattelun analyysi.* (9–36). Vastapaino.

Salo, U. (2015). Simsalabim, sisällönanalyysi ja koodaamisen haasteet. Teoksessa S. Aaltonen & R. Högbacka (toim.), *Umpikujasta oivallukseen: refleksiivisyys empiirisessä tutkimuksessa.* (ss. 166–190), Tampereen yliopisto.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? Teoksessa A. H. Schoenfeld (toim.), *Cognitive science and mathematical education* (ss. 189–215). Philadelphia: Lawrence Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harward Educational Review, 57*(1), 1–22.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*(20), 20–26.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics 37*, 251–274.

Tossavainen, T. & Leppäaho, H. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaksi opiskelevien matemaattisesta osaamisesta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 294–304). Porvoo: Niilo Mäki Intituutti.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (5., uud. laitos.). Tammi.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (Uudistettu laitos.). Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Vainionpää, J. & Joutsenlahti, J. (2010a). Opettajien matematiikkakuva ja matematiikan opettamisen olosuhteet. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* (ss. 149–164). Helsinki: Edita Prima Oy.

Vainionpää, J. & Joutsenlahti, J. (2010b). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* (ss. 137–148). Helsinki: Edita Prima Oy.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5), 371–384.

Yrjönsuuri, R. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 111–122). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri, Y. (2004). Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 123–137). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Liitteet

Liite 1 Haastattelurunko

1. **Tutustuminen (lämmittely)**
- Kuinka kauan olet työskennellyt luokanopettajana?
- Millainen koulutustausta sinulla on?
- Mitä luokka-astetta opetat tällä hetkellä?
- Mikä on sinulle tärkeää opettajan työssä?

2. **Matemaattisen ymmärryksen kehittyminen**
- Kerro, mitä sinulle tulee mieleen matemaattisen ymmärryksen kehittymisestä.
- Millä tavoin tuet matematiikan opetuksessasi oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä?
- Millä tavoin voit selvittää, tapahtuuko oppilaiden matemaattisessa ymmärryksessä kehitystä?

3. **Materiaalit matematiikan opetuksessa**
- Mitä eri opetusmateriaaleja käytät matematiikan opetuksessa tukeaksesi oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymistä?
- Mitä ovat eri opetusmateriaalien vahvuudet? Entä heikkoudet?
- Kerro, millä tavoin oppikirjojen avulla voidaan tukea matemaattisen ymmärryksen kehittymistä.
- Mitkä ovat oppikirjan vahvuudet liittyen matemaattisen ymmärryksen kehittymiseen? Entä heikkoudet?

4. **Opettajan panos**
- Mitä matemaattiseen ymmärrykseen tähtäävän matematiikan opetuksen suunnitteleminen vaatii opettajalta?
- Mitä tietoja ja taitoja tarvitset tällaisen opetuksen suunnitteluun ja toteuttamiseen?
- Mistä saat materiaalia matemaattista ymmärrystä tukevaan matematiikan opetukseen?
- Kuinka paljon matemaattiseen ymmärrykseen tähtäävän opetuksen suunnittelelminen vie aikaa?
- Koetko suunnittelemisen ja toteuttamisen kuormittavana?

5. **Matematiikan oppitunnit**
- Kerro, mistä asioista matematiikan oppituntisi tavallisesti rakentuu.
- Asetatko oppitunneillesi tavoitteita? Mitä tavoitteita?
- Millä tavoin aiemmin kuvaamasi matemaattisen ymmärryksen kehittymisen tukeminen näkyy oppitunneillasi?

Liite 2 Koodit

Yläluokka (sitaatit)	Alaluokka (koodit)	Koodit (sitaatit)
Orientaatiovaihe (13)	Uuteen aiheeseen orientoituminen (3)	Matematiikan oppimisen lähdettävä oppilaan kokemusmaailmasta (6) Uuden tiedon liittäminen aiempaan tietoon (5) Uuteen aiheeseen orientoituminen (2)
Konkreettinen vaihe (136)	Konkreettisuus tukee ymmärrystä (9)	Konkreettiset mielikuvat ymmärryksen tukena (4) Konkreettiset välineet ymmärryksen tukena (58) Matemaattisen ajattelun konkreettinen vaihe (1) Matematiikan havainnollistaminen ymmärryksen tukena (4) Matematiikan konkretisoiminen ymmärryksen tukena (4) Oppilaat tarvitsevat konkreettisia havaintoja (4) Oppilas saa itse oivaltaa (10) Tietoa ei voi siirtää oppilaille (1) Ymmärrys kehittyy konkreettisesta abstraktiin (8)
	Pedagogisia huomioita välineiden käyttöön (18)	Alkuopetuksen jälkeen välineiden käyttö vähenee (1) Digitaalinen kelloväline (1) Digitaaliset 10-järjestelmävälineet (3) Digitaaliset havainnollistamisvälineet ymmärryksen tukena (12) Ei kokemuksia välineiden huonoudesta (1) Eri välineiden käyttö ymmärryksen tukena (2) Itse välineellä ei ole merkitystä (1) Konkreettisia välineitä ei riitä kaikille oppilaille (1) Moniaistikanavainen tukeminen (2) Oppilaiden ehdollistuminen tiettyyn välineeseen (1) Saman välineen hyödyntäminen eri käsitteiden oppimisessa (1) Tutun välineen priorisoiminen (2) Välineet sekoittavat oppilaiden ajattelua (2) Välineet tukena kirjan tehtävissä (1)

		Välineet vievät huomion vääriin asioihin (8) Välineiden käyttö aikaa vievää (1) Välineiden runsaudella ei ole merkitystä ymmärryksen suhteen (1) Välineisiin tutustuminen (3)
	Piirtäminen ymmärryksen tukena (2)	Piirtäminen ymmärryksen tukena (10) Yksinkertaistetut piirrokset (2)
Harjoitteluvaihe (141)	Oppikirjat (21)	Alaspäin eriytetyt oppikirjat ymmärryksen tukena (1) Eritasoiset tehtävät oppikirjassa (5) Kuvallisen tuen merkitys oppikirjoissa (3) Mekaaninen harjoittelu ei takaa ymmärrystä (2) Mekaanista harjoittelua tarvitaan (9) Mekaanisuus oppikirjan ongelmana (17) Menetelmän osaaminen ei kerro ymmärryksestä (12) Oppikirjan demonstraatiot (7) Oppikirja ei takaa ymmärrystä (10) Oppikirja voi tukea ymmärrystä, jos oppilas on ymmärtänyt asian (3) Oppikirjan ongelmanratkaisutehtävät (2) Oppikirjan tehtäviä vasta, kun asia on opittu (4) Oppikirjan tehtävät voivat haitata ymmärrystä (3) Oppikirjan tekeminen ei saa olla suorituskeskeistä (5) Oppikirjassa ei ole tarpeeksi soveltavia tehtäviä (1) Oppikirjassa ei ole tilaa piirtämiselle (2) Oppikirjoissa eroja havainnollisuuden suhteen (1) Oppikirjoissa havainnollistetaan käsitteiden välisiä yhteyksiä (1) Suljetut tehtävät oppikirjojen haasteena (1) Suorituskeskeinen harjoittelu (1) Yksinkertaiset tehtävät ymmärryksen tukena (2)
	Digimateriaalit (5)	Digimateriaalit ymmärryksen tukena (1)

		Digitaalisen materiaalin ongelmana keskustelun puute (1) Tutkimuspohjaiset digimateriaalit (3) Oppikirjojen digimateriaalit (2) Toistot digimateriaaleilla (2)
	Kotitehtävät (3)	Kotitehtävän täytyy tukea oppimista (3) Kotitehtävät yksilöllisesti (2) Oppikirjasta on helppo antaa kotitehtäviä (4)
	Toistot (3)	Monipuoliset tehtävät mekaaniseen toistamiseen (1) Toistot digimateriaaleilla (2) Toistot ymmärryksen tukena (7)
	Struktuuri (3)	Oppikirja tarjoaa struktuurin oppimiselle (6) Struktuuri tukee ajattelun kehittymistä (6) Struktuuri tukee oppilaan toiminnan ohjausta (2)
	Pedagogiset ratkaisut (5)	Erilaiset ratkaisutavat (3) Muistia tukevat välineet ymmärryksen tukena (2) Tehtävien jakaminen osiin ymmärryksen tukena (4) Virheen kautta oivaltaminen (1) Ymmärrykseen tähtäävä kokeen tarkistus (1)
Matemaattisen tietoverkoston kehittyminen	Tietoverkoston kehittyminen (4)	Kun käsite on ymmärretty, konkretiaa ei tarvita (2) Käsitteen eri osien tunnistaminen (2) Käsitteen jakaminen osiin matemaattisen ymmärryksen tukena (9) Käsitteiden välisten yhteyksien tukeminen (3)
Matematiikan soveltaminen	Matematiikan soveltaminen (8)	Avoimet tehtävät tukevat ymmärrystä (2) Matematiikkapelit ymmärryksen tukena (13) Oppilaan hankalaa tarkistaa tehtäviä itse (1) Pelilliset tehtävät soveltamisen harjoittelussa (2) Päässälaskut soveltamisen harjoitteluna (1) Soveltaminen merkkinä ymmärryksestä (4)

		Soveltaminen vaatii käsitteiden välisten yhteyksien tunnistamista (3) Soveltavat tehtävät ymmärryksen tukena (8)
Matematiikkapuhe	Matematiikan sanallistaminen (5)	Kirjallinen kielentäminen matemaattisen ymmärryksen tukena (6) Matematiikasta keskusteleminen ymmärryksen tukena (10) Oppilaan matemaattinen ajattelu kehittyy sanallistaessa (1) Oppilaan vaikeaa sanallistaa matemaattista ajatteluaan (3) Sanallistaminen merkkinä ymmärryksestä (1)
	Oppilaiden välinen vuorovaikutus (2)	Oppilaiden välinen matematiikkakeskustelu (10) Ryhmätyöskentely (2)
	Opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus (4)	Käsitteen muodostaminen yhdessä ymmärryksen tukena (11) Opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus ajattelun kehityksen tukena (12) Oppilaan matemaattisen ajattelun ohjaaminen keskustelemalla (21) Tilaa oppilaiden omalle ajattelulle (2)
Opettajan tieto	Sisältötieto (4)	Alkuopetuksessa ei tarvita korkeaa matemaattista osaamista (1) Opettaja on vastuussa omasta osaamisestaan (2) Opettaja tarvitsee sisältötietoa (15) Opettajan tulee olla kiinnostunut matematiikasta (7)
	Pedagoginen sisältötieto (7)	Erilaiset näkökulmat tukevat ymmärrystä (2) Matemaattinen ymmärrys kehittyy vaiheittain (2) Matematiikan ymmärtäminen on monimutkainen asia (1) Matematiikan ymmärtämiseen liittyy eri osa-alueita (1) Matematiikkaa voi opettaa monella tavalla (1) Opettaja tarvitsee pedagogista sisältötietoa (16) Ymmärrys on kumuloituvaa (1)
	Tieto oppilaista (2)	Diagnostinen arviointi (41)

		Formatiivinen arviointi (48)
Opetuksen suunnittelu	Tavoitteet ohjaavat opetusta (9)	Matematiikassa opetettava sisältö on myös tavoite (8) Opetuksen suunnittelu lähtee opetussuunnitelmasta (6) Oppikirjan valitseminen opetussuunnitelman tavoitteiden mukaan (2) Oppitunnin sisältö ja tavoite ei ole sama asia (1) Tavoite jakautuu useammalle oppitunnille (2) Tavoitteen asettaminen tunnille (2) Tavoitteena ymmärrys (6) Tavoitteet ohjaavat opetusta (10) Yksi tavoite on parempi kuin monta tavoitetta (1)
	Sisältöjen valitseminen (10)	Materiaalien valinta niiden hyödyllisyyden mukaan (4) Muiden oppiaineiden integroiminen matematiikkaan (3) Opettajan tulee olla kriittinen (5) Opettajan vastuu oppimateriaalien arvioinnissa (2) Opetus ei voi perustua oppikirjan ratkaisuihin (8) Opetusmenetelmän valinta riippuen opittavasta asiasta (7) Oppikirjan tehtävien valikoiminen (4) Oppitunnilla keskitytään olennaisimpaan asiaan (6) Sisällöt valitaan tavoitteen mukaan (6) Välineiden käytön hyödyllisyys opettajan vastuulla (2)
	Opettajan vastuu ymmärryksen tukemisessa (2)	Opettajan on tehtävä töitä matemaattisen ymmärryksen kehittymisen eteen (5) Ymmärryksen kehittäminen opettajan vastuulla (9)
	Kollegiaalinen yhteistyö (3)	Kollegiaalinen yhteistyö matematiikan opetuksen suunnittelussa (3) Kollegoilta materiaalia (2) Samanaikaisopetuksen hyödyntäminen (11)